Κβαντομηχανική Ι
Λύσεις προόδου

Άσκηση 1

$$\psi(x) = A\,Sin\,(k\,x), -\infty < x < \infty$$

α) $Sin\,(k\,x) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$
Με πιθανές τιμές ορμής $p = \pm\,\hbar k$, από τον τύπο του De Broglie. Καθεμιά έχει πιθανότητα 50%.

b) $\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle = -i\,\hbar \int_{-\infty}^{\infty} Sin\,(k\,x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} Sin\,(k\,x)\mathrm{dx}$

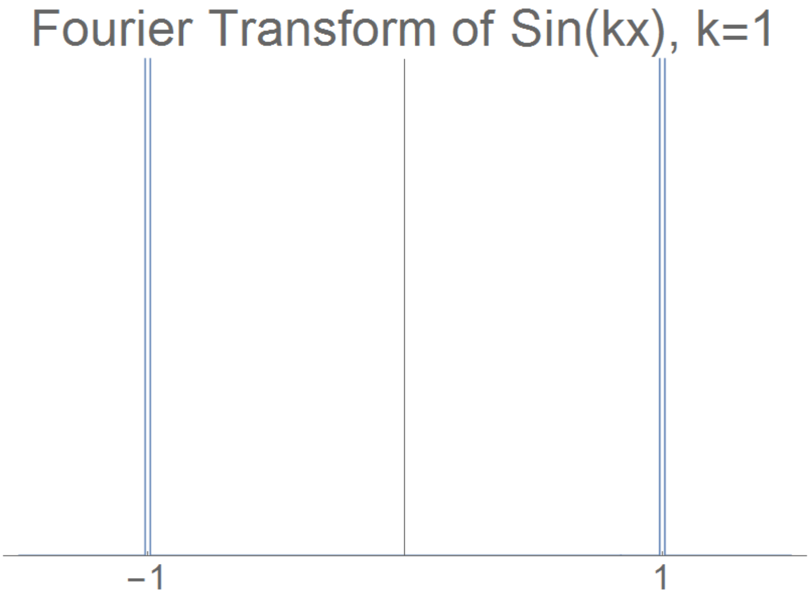
$$= -i\,\hbar\,k \int_{-\infty}^{\infty} Sin\,(k\,x)\,Cos\,(k\,x)\mathrm{dx} = 0$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2}\hbar\,k + \frac{1}{2}(-\hbar\,k) = 0$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\,k^2 + \frac{1}{2}(\hbar^2\,k^2) = \hbar^2\,k^2$$

$$\Delta p = \sqrt{\hbar^2\,k^2} = \hbar k$$

Οι λύσεις επιβεβαιώνονται από το παρακάτω διάγραμμα: ο μετασχηματισμός fourier ενός ημιτόνου, δίνει δυο κορυφές, δ-συναρτήσεις με κεντρο τα $\pm k$, συμμετρικά εκατέρωθεν του p=0. Άρα, η μέση τιμή της ορμής είναι 0, και η αβεβαιότητα k.



c) $\langle p \rangle = 0$ ιδιοκατάσταση του απειρόβαθου πηγαδιού

$$\langle p^2 \rangle = \langle \psi | p^2 | \psi \rangle = -\hbar^2 \int_0^{n\pi/\kappa} Sin\,(k\,x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2} Sin\,(k\,x) \mathrm{dx}$$

$$= \hbar^2 k^2 \int_0^{n\pi/\kappa} Sin^2(k\,x) \mathrm{dx}$$

$$= \hbar^2 k^2 \,\frac{1}{4} k(-2n\pi + Sin[2n\pi])$$

$$= \hbar^2 k^2 \,\frac{1}{4} (2n\pi)$$

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 k\, n\, \pi \frac{1}{2}$$

$$\frac{n\pi}{k} = a \Rightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2a^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2a^2}} = \frac{\hbar\, n\, \pi}{\sqrt{2}a}$$

<u>Άσκηση 2</u>

a) $|\psi|^2 = 1$

$$\rightarrow N^2 \int (\psi_1^* + 2\psi_2^* + 3\psi_3^*)(\psi_1 + 2\psi_2 + 3\psi_3) dx = 1$$

$$N^2 \int (\psi_1^* \psi_1 + 4\psi_2^* \psi_2 + 9\psi_3^* \psi_3) dx$$

$$= N^2 (1 + 4 + 9)$$

$$= 14N^2 = 1$$

$$\rightarrow N^2 = \frac{1}{14}$$

$$\langle A \rangle = N^2 \int (\psi_1^* A \psi_1 + 4\psi_2^* A \psi_2 + 9\psi_3^* A \psi_3) dx$$

$$= \frac{1}{14} \int (-2\psi_1^* \psi_1 + 0\psi_2^* \psi_2 + 27\psi_3^* \psi_3) dx$$

$$= \frac{25}{14}$$

b) $\langle A^2\rangle = N^2\int(\psi_1^* A^2\psi_1 + 4\psi_2^* A^2\psi_2 + 9\psi_3^* A^2\psi_3)dx$

$$= \frac{1}{14}\int(4\psi_1^*\psi_1 + 0\psi_2^*\psi_2 + 81\psi_3^*\psi_3)dx$$

$$= \frac{85}{14}$$

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = \sqrt{\frac{85}{14} - \frac{625}{196}} = \sqrt{\frac{1190}{196} - \frac{625}{196}} = \sqrt{\frac{565}{196}} = \frac{\sqrt{565}}{14}$$

$$= 1.69784$$

Άσκηση 3

α)$\langle K\rangle = \left\langle n\left|\frac{p^2}{2m}\right|n\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle n\left|\left(\frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}}\right)^2\right|n\right\rangle =$

$-\frac{1}{4}\left\langle n\left|a^2 - aa^\dagger - a^\dagger a + {a^\dagger}^2\right|n\right\rangle$

$$= \frac{1}{4}\langle n|aa^\dagger + a^\dagger a|n\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle n|aa^\dagger|n\rangle + \langle n|a^\dagger a|n\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle n|n+1|n\rangle + \langle n|n|n\rangle\right) = \frac{1}{4}(2n+1) = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\langle K\rangle = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \frac{1}{2}E \quad !$$

Αυτό όμως είναι ένα αποτέλεσμα που περιμέναμε: Η μέση κινητική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή είναι η μισή ολική ενέργεια, γιατί $E = K + U$.

β) $a^{\dagger}|0\rangle = \sqrt{1}|1\rangle$

$${a^{\dagger}}^{2}|0\rangle = \sqrt{1}a^{\dagger}|1\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}|2\rangle$$

$${a^{\dagger}}^{n}|0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{n}|n\rangle$$

$${a^{\dagger}}^{n}|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{{a^{\dagger}}^{n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

Άσκηση 4

Από θεώρημα του Ehrenfest,

a) $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \langle u\rangle$

b) $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \langle F(x)\rangle$

Άσκηση 5

a) i) $\langle A|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - i\langle 2|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle) = \frac{1}{2}(\langle 1|1\rangle + \langle 2|2\rangle - i\langle 2|1\rangle + i\langle 1|2\rangle)$

$$= \frac{1}{2}(1+1)$$

$$= \langle A|A\rangle = 1$$

$$\text{ii) } \langle A|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - i\langle 2|)\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}(\langle 1|1\rangle - \langle 2|2\rangle - i\langle 2|1\rangle + i\langle 1|2\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}(1-1)$$
$$\langle A|B\rangle = 0$$

$$\text{iii)} \langle B|A\rangle = \langle A|B\rangle^* = 0$$

$$\text{iv)} |B\rangle = |A\rangle^*$$
$$\langle B|B\rangle = \langle A|A\rangle^* = 1$$

b) $|\psi(0)\rangle = |A\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + i|2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}\right)$

c) $P_A = |\langle A|\psi(t)\rangle|^2$

$$\langle A|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(\langle 1| - i\langle 2|)\left(|1\rangle e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + i|2\rangle e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\langle 1|1\rangle e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \langle 2|2\rangle e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} + i\langle 2|1\rangle e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} + i\langle 1|2\rangle e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right)$$

$$P_A = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right)\left(e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} + e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 1 + e^{\frac{i(E_1 - E_2)t}{\hbar}} + e^{-\frac{i(E_1 - E_2)t}{\hbar}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}[2 + 2Cos(\omega\, t)] \quad \omega = (E_1 - E_2)/\hbar$$
$$P_A = \frac{1}{2}[1 + Cos(\omega t)]$$

Αντίστοιχα,

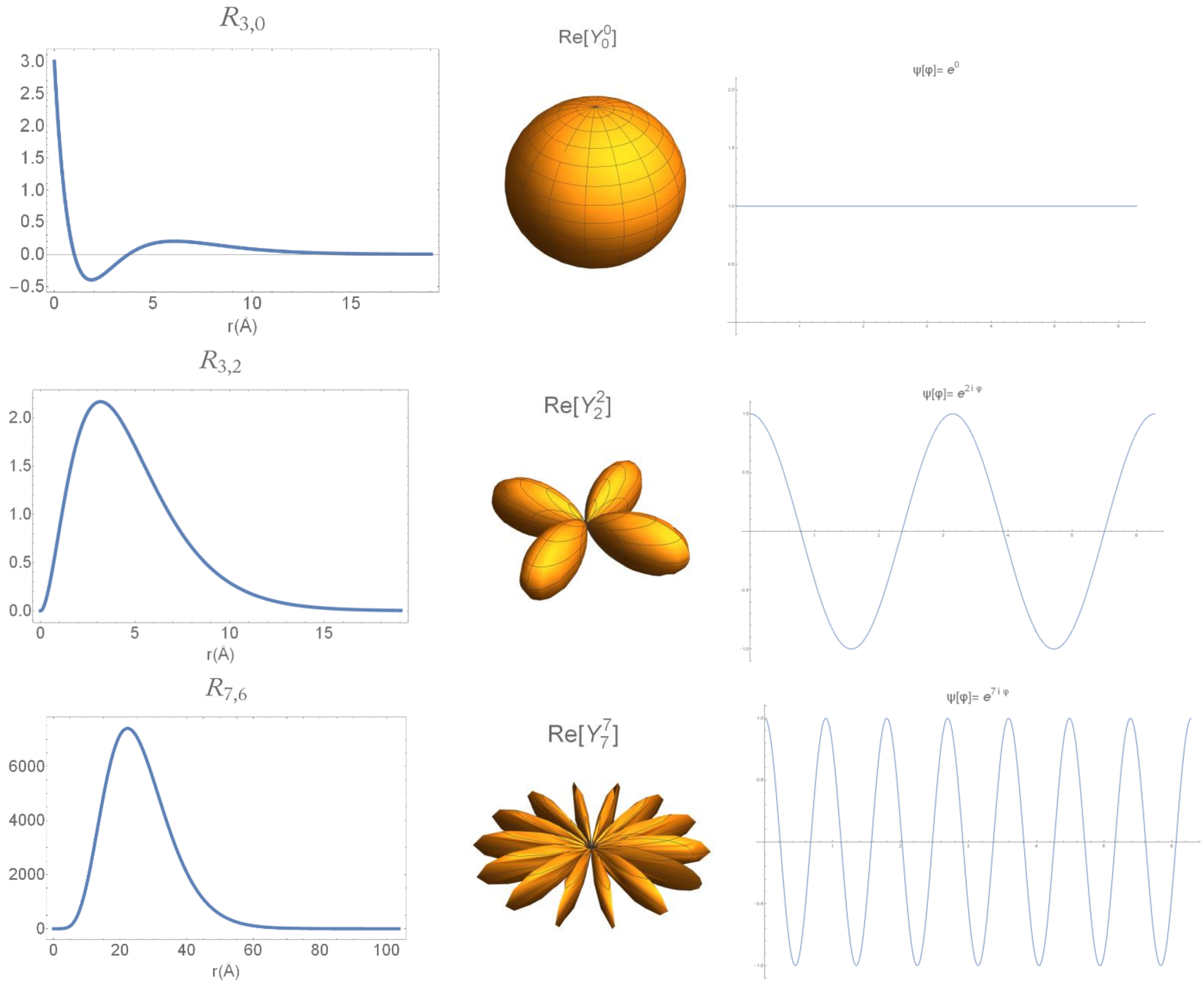
$$P_B = \frac{1}{2}[1 - Cos(\omega t)]$$

d) P_A *μέγιστο όταν* $Cos(\omega t) = 1 \rightarrow \omega t = 2n\pi \rightarrow t = 2n\pi/\omega$

P_B *μέγιστο όταν* $Cos(\omega t) = -1 \rightarrow \omega t = (2n+1)\pi \rightarrow$

$$t = (2n+1)\pi/\omega$$

Άσκηση 6



Άσκηση 7

a) $\langle L^2 \rangle = \langle lm|L^2|lm \rangle = l(l+1)\langle lm|lm \rangle = l(l+1)$

$$\langle (L^2)^2 \rangle = \langle lm|L^2 L^2|lm\rangle = l^2(l+1)^2$$
$$\Delta(L^2) = \sqrt{\langle \left(L^2\right)^2 \rangle - \langle L^2\rangle^2} = 0$$

b) $\langle L_z\rangle = \langle lm|L_z|lm\rangle = m$
$$\langle (L_z)^2\rangle = \langle lm|L_z L_z|lm\rangle = m^2$$
$$\Delta(L_z) = 0$$

c) $\langle L_x\rangle = \langle lm|L_x|lm\rangle = \left\langle lm\middle|\frac{L_+ + L_-}{2}\middle|lm\right\rangle = 0$

$$\langle (L_x)^2\rangle = \langle lm|L_x L_x|lm\rangle = \left\langle lm\middle|\left(\frac{L_+ + \ L_-}{2}\right)^2\middle|lm\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{4}\langle lm|(L_+^2 + L_+L_- + L_-L_+ - \ L_-^2)|lm\rangle =$$
$$= \frac{1}{4}\langle lm|(L_+L_- + L_-L_+)|lm\rangle$$
$$= \frac{1}{4}(\langle lm|L_+L_-|lm\rangle + \langle lm|L_-L_+|lm\rangle)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\langle lm|L_+|l,m-1\rangle + \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\langle lm|L_-|l,m+1\rangle\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\sqrt{l(l+1)-(m-1)m}\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\langle lm|lm\rangle + \sqrt{l(l+1)-(m+1)m}\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\langle lm|lm\rangle\Big)$$
$$= \frac{1}{4}[l(l+1)-(m-1)m + l(l+1)-(m+1)m]$$
$$= \frac{1}{4}[2l(l+1)-2m^2]$$
$$= \frac{1}{2}[l(l+1)-m^2]$$

$$\Delta(L_x) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]}$$

d) Αντίστοιχα,

$$\Delta(L_y) = \sqrt{\frac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2\right]}$$

Άσκηση 8

a) $H\psi = E\psi$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + V(x)\psi = E\psi$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = ae^{-ax}(ax-2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\ ae^{-ax}(ax-2) + V(x)xe^{-ax} = Exe^{-ax}$$

$$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\ a(ax-2) + V(x)x = Ex$$

$$\rightarrow V(x) - E = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{a(ax-2)}{x}$$

$$\rightarrow V(x) - E = \frac{\hbar^2}{2m}a^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2a}{x}$$

$$\rightarrow V(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{a}{x} + k, \quad E = -\frac{\hbar^2}{2m}a^2 + k$$

Όπου μπορούμε να θέσουμε τη σταθερά k=0.

b) $\langle V(x)\rangle = -\frac{\hbar^2 a}{m}\int_0^\infty \frac{1}{x}x^2 e^{-2ax}dx = -\frac{\hbar^2 a}{m}\int_0^\infty xe^{-2ax}dx$

$$\rightarrow \langle V(x)\rangle = -\frac{\hbar^2}{4ma}$$

c) $\langle K\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty xe^{-ax}\frac{d^2}{dx^2}(xe^{-ax})dx$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty xe^{-ax}\, ae^{-ax}(ax-2)dx$$

$$= -a\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^\infty xe^{-2ax}(ax-2)dx$$

$$= \frac{1}{4a^2}a\frac{\hbar^2}{2m}$$

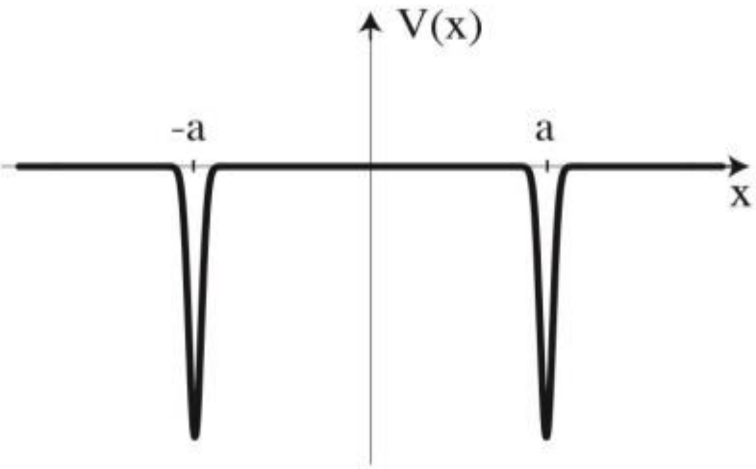
$$\langle K\rangle = \frac{\hbar^2}{8ma}$$

Άσκηση 9

http://www.physicspages.com/2012/08/02/double-delta-function-well-scattering-states/

Η άσκηση μελετά τις καταστάσεις σκέδασης ενός διπλού πηγαδιού, αλλά η φυσική είναι πρακτικά η ίδια.

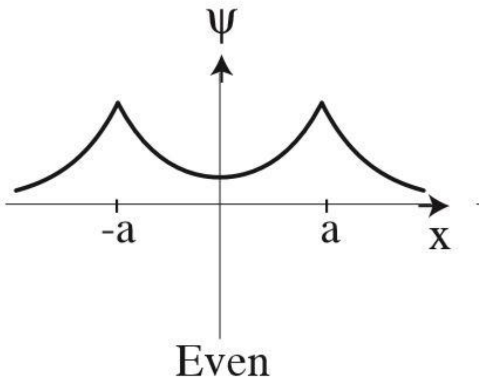
Άσκηση 10



Το δυναμικό είναι συμμετρικό, άρα θα υπάρχουν είτε άρτιες είτε περιττές λύσεις.

Άρτιες λύσεις

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-kx}, & x > a \\ B(e^{kx} + e^{-kx}), & -a < x < a \\ Ae^{kx}, & x < -a \end{cases}$$



Συνέχεια στο x=a,

$$A = B(e^{2ka} + 1)$$

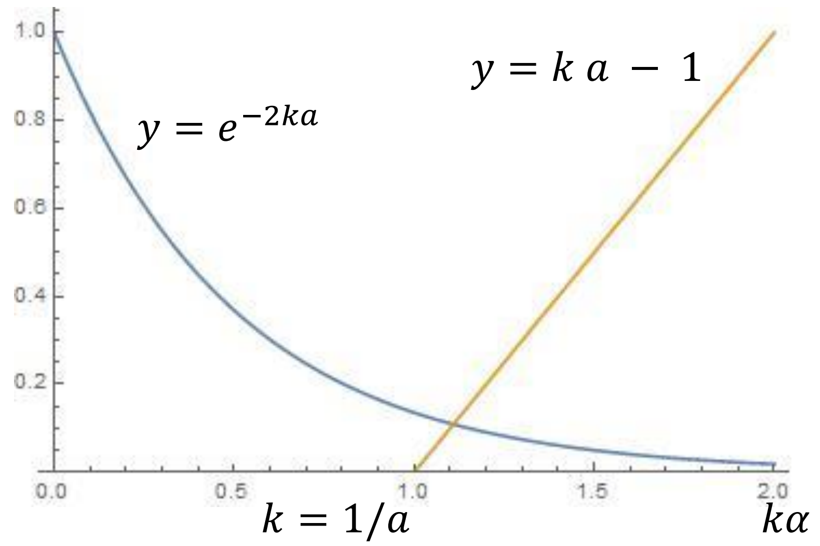
Ασυνέχεια παραγώγου στο x=a
⇨ *Ολοκλήρωση εξίσωσης του Schrodinger,*

$$\Delta \frac{d\psi}{dx} = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\hbar^2}{mL}\,\psi(a) = -\frac{2}{a}\,\psi(a)$$

$$-kAe^{-ka} - B(ke^{ka} - ke^{-ka}) = -\frac{2}{a}\,Ae^{-ka}$$

Συνδυάζοντας τις δυο,

$$e^{-2ka} = ka - 1$$



Όπως βλέπουμε από τη γραφική, υπάρχει μια άρτια λύση, εκεί που η ευθεία $y = ka - 1$ *τέμνει την εκθετική πτώση* e^{-2ka}

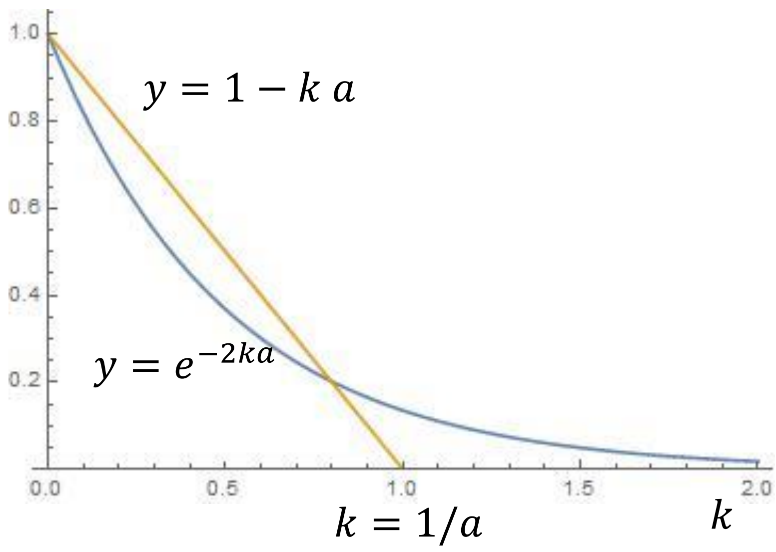
Newton Raphson: $ka = 1.109$

Ή, με το μάτι, $ka \approx 1.1$

$$k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \Rightarrow E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -1.23\,\frac{\hbar^2}{2m}$$

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε για περιττή λύση στη συνάρτηση

$$e^{-2ka} = 1 - ka$$



$$ka = 0.797$$

$$\Rightarrow E = -0.63\,\frac{\hbar^2}{2m}$$