

Πρόοδος Κβαντομηχανικής Ι
Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017

Όνοματεπώνυμο _____

A.M. _____

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα

(1) Για την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = A \sin(kx)$ [για $-\infty < x < \infty$], βρείτε:

(a) Όλες τις πιθανές τιμές της ορμής (και τις αντίστοιχες πιθανότητες μέτρησης)

(b) $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, και Δp .

Για την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = A \sin(kx)$ [για $0 < x < n\pi/k$], στην στάσιμη κατάσταση ($n=1$) βρείτε:

(c) $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, και Δp .

(2) Δίνεται η κατάσταση υπέρθεσης: $\psi = N(\psi_1 + 2\psi_2 + 3\psi_3)$

όπου ψ_1, ψ_2, ψ_3 είναι ορθοκανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις ενός τελεστή \hat{A} με ιδιοτιμές $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 3$.

Υπολογίστε:

(a) την μέση τιμή $\langle \hat{A} \rangle$ και

(b) την αβεβαιότητα $\Delta \hat{A}$.

(3) (a) Βρείτε τη μέση τιμή της κινητικής ενέργειας $\langle K.E. \rangle$ της κατάστασης $|n\rangle$ του αρμονικού ταλαντωτή.

(b) Εκφράστε την κατάσταση $|n\rangle$ ως συνάρτηση της κατάστασης $|0\rangle$, και του τελεστή ανάβασης a^\dagger .

(4) Από την χρονοεξάρτηση του τελεστή \hat{A} : $\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle$, βρείτε: (α) $\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt}$ (β) $\frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt}$.

(5) Χαμιλτονιανή \hat{H} έχει δύο ορθοκανονικοποιημένες καταστάσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$, ώστε:

$\hat{H}|1\rangle = E_1|1\rangle$, και $\hat{H}|2\rangle = E_2|2\rangle$.

Ορίζουμε τις καταστάσεις: $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$ και $|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$

(a) Υπολογίστε $\langle A|A \rangle$, $\langle A|B \rangle$, $\langle B|A \rangle$, και $\langle B|B \rangle$.

(b) Αν σε χρόνο $t=0$, $|\psi(0)\rangle = |A\rangle$, βρείτε το $|\psi(t)\rangle$.

(c) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P_A(t)$ και $P_B(t)$ να βρεθεί το σύστημα που περιγράφεται από την $|\psi(t)\rangle$, στην κατάσταση $|A\rangle$ και $|B\rangle$ αντίστοιχα.

(d) Πότε μεγιστοποιείται το $P_A(t)$, και το $P_B(t)$;

(6) Σχεδιάστε τις ακτινικές και γωνιακές κυματοσυναρτήσεις:

- a) $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \varphi)], \text{Re}[\psi(\varphi)]$, για $n=3, l=0, m=0$.
- b) $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \varphi)], \text{Re}[\psi(\varphi)]$, για $n=3, l=2, m=2$.
- c) $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \varphi)], \text{Re}[\psi(\varphi)]$, για $n=8, l=7, m=7$.

(7) Σε άτομο υδρογόνου, το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην κατάσταση $|lm\rangle$, που είναι ιδιοσυνάρτηση των τελεστών \hat{L}^2 και \hat{L}_z . Υπολογίστε τις αβεβαιότητες των τελεστών $\hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{L}_x$ και \hat{L}_y .

(8) Η κυματοσυνάρτηση, και ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανής \hat{H} , για σωματίδιο με μάζα m που κινείται σε δυναμικό $V(x)$ είναι:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{όπου } a \text{ και } A \text{ είναι σταθερές, και } a > 0.$$

- (a) Βρείτε το $V(x)$ και τη συνολική ενέργεια E .
- (b) Υπολογίστε τη μέση τιμή της κινητικής ενέργειας $\langle K.E. \rangle$.
- (c) Υπολογίστε τη μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας $\langle V \rangle$.

(9) Σωματίδιο, με μάζα m και κινητική ενέργεια E , προσπίπτει (από αριστερά) στο δυναμικό:

$$V(x) = \alpha [\delta(x-L) + \delta(x+L)] \quad , \quad \text{όπου } L > 0 \text{ και } \alpha > 0.$$

Υπολογίστε την διαπερατότητα T και ανακλαστικότητα R .

(10) Σωματίδιο, με μάζα m , βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση στο συμμετρικό δυναμικό:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{mL} [\delta(x-L) + \delta(x+L)] \quad , \quad \text{όπου } L > 0.$$

Βρείτε τις ενέργειες όλων των στάσιμων καταστάσεων.

Δίνονται:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

$$l \pm |lm\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$$

Πρόοδος Κβαντομηχανικής Ι
Χειμερινό εξάμηνο 2016-2017
Απαντήσεις

Όνοματεπώνυμο _____ Α.Μ. _____

Έτος _____

Παρακολούθηση

Ασκήσεις

Διαλέξεις

1a				
1b	$\langle p \rangle =$	$\langle p^2 \rangle =$	$\Delta p =$	
1c	$\langle p \rangle =$	$\langle p^2 \rangle =$	$\Delta p =$	
2a	$\langle \hat{A} \rangle =$	2b	$\Delta \hat{A} =$	
3a	$\langle K \rangle =$	3b		
4a	$\frac{d\langle x \rangle}{dt} =$	4b	$\frac{d\langle p \rangle}{dt} =$	
5a	$\langle A A \rangle =$	$\langle A B \rangle =$	$\langle B A \rangle =$	$\langle B B \rangle =$
5b	$ \psi(t)\rangle =$	5c	$P_A(t) =$	$P_B(t) =$
5d				

6a	$\psi(r)$	$Re[\psi(\theta, \varphi)]$	$Re[\psi(\varphi)]$
6b	$\psi(r)$	$Re[\psi(\theta, \varphi)]$	$Re[\psi(\varphi)]$
6c	$\psi(r)$	$Re[\psi(\theta, \varphi)]$	$Re[\psi(\varphi)]$
7a	$\Delta \hat{L}^2 =$		7c $\Delta \hat{L}_x =$
7b	$\Delta \hat{L}_z =$		7d $\Delta \hat{L}_y =$

8a	$V(x) =$ $E =$	8b	$\langle K \rangle =$	8c	$\langle V \rangle =$
9	$T =$		$R =$		
10	$E_n =$				