

(1) [1] Δίνεται η κατάσταση υπέρθεσης: $\psi = N(2\psi_1 + \psi_2 + 5\psi_3)$

όπου ψ_1, ψ_2, ψ_3 είναι ορθοκανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις ενός τελεστή \hat{A} με ιδιοτιμές $a_1 = -3, a_2 = 0, a_3 = 1$.

Υπολογίστε (α) **[0,5]** την μέση τιμή $\langle \hat{A} \rangle$ και (β) **[0,5]** την αβεβαιότητα $\Delta \hat{A}$.

(2) [1,5] Υπολογίστε τους μεταθέτες: (α) $[x, p]$ (β) $[H, x]$

Για τον Αρμονικό Ταλαντωτή, υπολογίστε τους μεταθέτες: (c) $[H, a]$ (d) $[H, a^+]$ (e) $[a, a^+]$

(3) [2] Η κατάσταση ενός σωματιδίου μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi_0(x) = A \sin^2(kx), \quad \text{για } 0 < x < \pi/k.$$

και είναι μηδέν αλλού.

(α) **[0,5]** Κανονικοποιήστε, και βρείτε το A .

(β) **[1]** Υπολογίστε τις ποσότητες $\langle x \rangle, \sigma_x, \langle p \rangle, \sigma_p$

(γ) **[0,5]** Βεβαιωθείτε ότι το γινόμενο αβεβαιότητας δεν παραβιάζει την ανισότητα του Heisenberg.

(4) [2] Η κυματοσυνάρτηση, και ιδιοσυνάρτηση της Χαμιλτονιανή \hat{H} , για σωματίδιο με μάζα m που κινείται σε δυναμικό $V(x)$ είναι:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax(1-ax)e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{όπου } a \text{ κα } A \text{ είναι σταθερές, και } a > 0.$$

(α) **[1]** Βρείτε το $V(x)$ και την συνολική ενέργεια E .

(β) **[0,5]** Υπολογίστε την μέση τιμή της κινητικής ενέργειας $\langle K.E. \rangle$.

(c) **[0,5]** Υπολογίστε την μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας $\langle V \rangle$.

(5) [1] Σχεδιάστε τις ακτινικές και γωνιακές κυματοσυναρτήσεις:

a) **[0,25]** $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \phi)], \text{Re}[\psi(\phi)]$, για $n=4, l=0, m=0$.

b) **[0,25]** $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \phi)], \text{Re}[\psi(\phi)]$, για $n=2, l=1, m=1$.

c) **[0,25]** $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \phi)], \text{Re}[\psi(\phi)]$, για $n=4, l=2, m=2$.

d) **[0,25]** $\psi(r), \text{Re}[\psi(\theta, \phi)], \text{Re}[\psi(\phi)]$, για $n=9, l=8, m=8$.

(6) [2,5] Θεωρείστε αρμονικό ταλαντωτή, με κυματοσυνάρτηση $\Psi(x, t)$, που την στιγμή $t = 0$, δίνεται

από: $\Psi(x, 0) = A(1 + \sqrt{2}y)e^{-y^2/2}$

(α) **[0,5]** Βρείτε το A .

(β) **[0,5]** Υπολογίστε την πιθανότητα κατά την μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου την στιγμή $t = 0$, να βρείτε μια από τις ενέργειες E_n . Δίνουμε: $\psi_0(x, 0) = B_0 e^{-y^2/2}$, $\psi_1(x, 0) = B_1 y e^{-y^2/2}$, και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1) \sqrt{\pi}}{2^m a^{(m+1/2)}}.$$

(γ) **[0,5]** Βρείτε την κυματοσυνάρτηση σαν συνάρτηση του χρόνου t .

(δ) **[0,5]** Βρείτε την μέση τιμή της θέσης $\langle x \rangle$ και την τυπική απόκλιση της Δx σαν συνάρτηση του χρόνου t .

(ε) **[0,5]** Αν κάνετε μια μέτρηση της ενέργειας στο σύστημα σας σε χρόνο t , υπολογίστε ποιές είναι οι πιθανότητες να μετρήσετε τις ενέργειες E_n .

(BONUS) [1] Σωματίδιο, με μάζα m , υπάρχει σε τετραγωνικό δυναμικό, με βάθος V_0 και πάχος a (όπως στο σχήμα, δεξιά).

Για $V_0 = \frac{\hbar^2}{100ma^2}$, βρείτε τις επιτρεπτές ενέργειες και κυματοσυναρτήσεις.

