Λύσεις 9ου Set Ασκήσεων Κβαντομηχανικής Ι

Disclaimer:

Οι δυο ασκήσεις ζητούν τις κυματοσυναρτήσεις, τις ενέργειες, τις τιμές $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ των διαφόρων καταστάσεων και τη διόρθωση από διαταραχή, για μποζόνια (άσκηση 1) και φερμιόνια (άσκηση 2). Για να υπάρχει καλύτερη ροή, αλλά και άμεση σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων, θα λύσω τις ασκήσεις με διαφορετική σειρά, συγκεκριμένα σαν μια άσκηση με την εξής εκφώνηση:

Δυο ταυτόσημα σωματίδια υπάρχουν σε ένα απειρόβαθο πηγάδι, όπου 0 < x < L.

α) Βρείτε τις κυματοσυναρτήσεις και τις αντίστοιχες ιδιοενέργειες των τριών πρώτων καταστάσεων αν τα σωματίδια έχουν

i) $s_1 = s_2 = 0$

ii) $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$

β) Υπολογίστε $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ σε όλες τις ιδιοκαταστάσεις, και για τα δυο είδη σωματιδίων

γ) Πώς αλλάζει ο όρος $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ για δυο διακρίσιμα σωματίδια, σε σχέση με δυο διακρίσιμα;

δ) Βρείτε την πρώτη διόρθωση των ενεργειών, για $V = V_0 \delta(x_1 - x_2)$, και για τα δύο είδη σωματιδίων.

Λύση:

α) Αρχικά θα βρούμε τις κυματοσυναρτήσεις και των δυο ειδών σωματιδίων και τις ιδιοενέργειές τους.

i) Για μη διακρίσιμα μποζόνια,

$$\psi(x_1, x_2) = 1/\sqrt{2}\left[\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2) + \psi_\beta(x_1)\psi_\alpha(x_2)\right]$$

Και η ιδιοκατάσταση του πηγαδιού,

$$\psi_n(x) = \sqrt{2/L}\, Sin(n\pi x/L)$$

Η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος θα αποτελείται από τα δυο μποζόνια στη χαμηλότερη ιδιοκατάσταση του πηγαδιού. Καθώς το σπιν των μποζονίων είναι ίσο με μηδέν, οι δυο ιδιοτιμές των σπιν θα είναι πάντα ίσες με μηδέν, άρα η κυματοσυνάρτηση των σπιν θα είναι συμμετρική.

$$\psi_{spin} = |0,0\rangle$$

Έτσι, για να είναι η ολική κατάσταση συμμετρική, θα πρέπει και η χωρική κατάσταση να είναι συμμετρική.

$$\boxed{\psi_{space_1}(x_1, x_2) = \frac{2}{L}\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)}$$

Η ενέργεια αυτής της κατάστασης είναι το σύνολο των ενεργειών των δυο σωματιδίων (εφ'όσον τα δυο σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν!)

$$E_1 = (n_1^2 + n_1^2)\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$E_1 = 2\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$\boxed{E_1 = \frac{h^2\pi^2}{mL^2}}$$

Ενώ η πρώτη διεγερμένη θα έχει το ένα μποζόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του πηγαδιού, και το άλλο στην πρώτη διεγερμένη:

$$\psi_{space_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{L}Sin(\pi x_1/L)Sin(2\pi x_2/L) + \frac{2}{L}Sin(2\pi x_1/L)Sin(\pi x_2/L)\right]$$

$$\boxed{\psi_{space_2}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{2}}{L}[Sin(\pi x_1/L)Sin(2\pi x_2/L) + Sin(2\pi x_1/L)Sin(\pi x_2/L)]}$$

Με ενέργεια

$$\boxed{E_2 = (1 + 2^2)\frac{h^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{5}{2}\frac{h^2\pi^2}{mL^2}}$$

Η δεύτερη διεγερμένη κατάσταση θα περιέχει δυο μποζόνια στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση του πηγαδιού:

$$\psi_{space_3}(x_1, x_2) = \frac{2}{L}[Sin(2\pi x_1/L)Sin(2\pi x_2/L)]$$

Και η ενέργειά της θα είναι

$$\boxed{E_3 = 8\frac{h^2\pi^2}{2mL^2} = 4\frac{h^2\pi^2}{mL^2}}$$

ii) Για μη διακρίσιμα φερμιόνια,

$$\boxed{\psi_{space_n}(x_1, x_2) = 1/\sqrt{2}\left[\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2) - \psi_\beta(x_1)\psi_\alpha(x_2)\right]}$$

Η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος θα αποτελείται από τα δυο φερμιόνια στη χαμηλότερη ιδιοκατάσταση του πηγαδιού,

$$\boxed{\psi_{space_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_1(x_2) - \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)]}$$

Φαίνεται όμως ότι η αντισυμμετρική χωρική κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται, αν και τα δυο φερμιόνια είναι στην ίδια κατάσταση.

Στην πραγματικότητα, αυτή που πρέπει να είναι αντισυμμετρική είναι η ολική κυματοσυνάρτηση,

$$\psi(x)s(\chi)$$

Έτσι λοιπόν, μπορούμε να έχουμε μια κυματοσυνάρτηση που το χωρικό της μέρος είναι συμμετρικό, αλλά το σπιν της αντισυμμετρικό, και αντίστροφα, και η ολική αυτή κυματοσυνάρτηση είναι αντισυμμετρική, όπως πρέπει να είναι για φερμιόνια.

Οι καταστάσεις του σπιν είναι

Αντισυμμετρικές:

$$\psi^{a}_{spin} = |0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|1/2,-1/2\rangle - \,|-1/2,1/2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

Συμμετρικές:

$$\psi^{s}_{spin_1} = |1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle = \uparrow\uparrow$$

$$\psi^{s}_{spin_0} = |1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,|1/2,-1/2\rangle + \,|-1/2,1/2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$$

$$\psi^{s}_{spin_{-1}} = |1,-1\rangle = |-1/2,-1/2\rangle = \downarrow\downarrow$$

Έτσι, η θεμελιώδης κατάσταση γίνεται

$$\boxed{\psi_1(x_1,x_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right] \times \,\left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]}$$

Δηλαδή, τα δυο φερμιόνια θα βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση του πηγαδιού, αλλά με αντίθετα σπιν.

$$E_1 = (n_1^2 + n_1^2)\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$E_1 = 2\frac{h^2\pi^2}{2mL^2}$$

$$\boxed{E_1 = \frac{h^2\pi^2}{mL^2}}$$

Η πρώτη διεγερμένη θα έχει το ένα φερμιόνιο στη θεμελιώδη κατάσταση του πηγαδιού, και το άλλο στην πρώτη διεγερμένη. Τα σπιν τους όμως μπορεί να έχουν τρεις διαφορετικούς τρόπους διάταξης, όπου και οι τρεις θα είναι συμμετρικοί. Έτσι, η πρώτη διεγερμένη κατάσταση θα έχει τριπλό εκφυλισμό σπιν:

$$\psi_{2\uparrow\uparrow}(x_1,x_2) = [\uparrow\uparrow] \times \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - \frac{2}{L} Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{\psi_{2\uparrow\uparrow}(x_1,x_2) = [\uparrow\uparrow] \times \left\{\frac{\sqrt{2}}{L}\left[Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}}$$

$$\psi_{2\uparrow\downarrow}(x_1,x_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\right] \times \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - \frac{2}{L} Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{\psi_{2\uparrow\downarrow}(x_1,x_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\right] \times \left\{\frac{\sqrt{2}}{L}\left[Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}}$$

$$\psi_{2\downarrow\downarrow}(x_1,x_2) = [\downarrow\downarrow] \times \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - \frac{2}{L} Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{\psi_{2\downarrow\downarrow}(x_1,x_2) = [\downarrow\downarrow] \times \left\{\frac{\sqrt{2}}{L}\left[Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}}$$

Με ενέργεια

$$\boxed{E_2 = (1 + 2^2)\frac{h^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{5}{2}\frac{h^2\pi^2}{mL^2}}$$

Η δεύτερη διεγερμένη κατάσταση θα περιέχει δυο φερμιόνια στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση του πηγαδιού, με τα σπιν τους αντίθετα:

$$\psi_2(x_1,x_2) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right\} \times \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) + \frac{2}{L} Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{\psi_2(x_1,x_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right] \times \left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)\right]}$$

Και η ενέργειά της θα είναι

$$\boxed{E_3 = 8\frac{h^2\pi^2}{2mL^2} = 4\frac{h^2\pi^2}{mL^2}}$$

γ)Για να βρούμε τη μέση τιμή του τετραγώνου της διαφοράς των θέσεων, αρχικά θα αναπτύξουμε τη μέση τιμή:

$$\boxed{\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle}$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{1}{2}\Bigg[\overbrace{\int x_1^2\, |\psi_\alpha(x_1)|^2 dx_1}^{\langle x^2 \rangle_a} \overbrace{\int \left|\psi_\beta(x_2)\right|^2 dx_2}^{1} + \overbrace{\int x_1^2\, |\psi_b(x_1)|^2 dx_1}^{\langle x^2 \rangle_b} \overbrace{\int |\psi_a(x_2)|^2 dx_2}^{1}$$

$$\pm \overbrace{\int x_1^2 \psi_a^*(x_1)\psi_b(x_1) dx_1}^{\langle x^2 \rangle_{ab}} \overbrace{\int \psi_b^*(x_2)\psi_a(x_2) dx_2}^{0}$$

$$\pm \overbrace{\int x_1^2\, \psi_b^*(x_1)\psi_a(x_1) dx_1}^{\langle x^2 \rangle_{ba}} \overbrace{\int \psi_a^*(x_2)\psi_b(x_2) dx_2}^{0} \Bigg]$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{1}{2}(\langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b)$$

Και $\langle x_1^2 \rangle = \langle x_2^2 \rangle$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{2}\Bigg[\overbrace{\int x_1 |\psi_\alpha(x_1)|^2 dx_1}^{\langle x \rangle_a} \overbrace{\int x_2 \left|\psi_\beta(x_2)\right|^2 dx_2}^{\langle x \rangle_b}$$

$$+ \overbrace{\int x_1\, |\psi_b(x_1)|^2 dx_1}^{\langle x \rangle_b} \overbrace{\int x_2 |\psi_a(x_2)|^2 dx_2}^{\langle x \rangle_a}$$

$$\pm \overbrace{\int x_1 \psi_a^*(x_1)\psi_b(x_1) dx_1}^{\langle x \rangle_{ab}} \overbrace{\int x_2 \psi_b^*(x_2)\psi_a(x_2) dx_2}^{\langle x \rangle_{ba}}$$

$$\pm \overbrace{\int x_1\, \psi_b^*(x_1)\psi_a(x_1) dx_1}^{\langle x \rangle_{ba}} \overbrace{\int x_2 \psi_a^*(x_2)\psi_b(x_2) dx_2}^{\langle x \rangle_{ab}} \Bigg]$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{2}[\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b + \langle x \rangle_b \langle x \rangle_a \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ba} \pm \langle x \rangle_{ba} \langle x \rangle_{ab}\ ]$$

Με $\langle x \rangle_{ab} = \int x\, \psi_a^*(x)\psi_b(x) dx = \langle x \rangle_{ba}^*$

$$\Rightarrow \langle x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{2}(2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b \pm \langle x \rangle_{ab} \langle x \rangle_{ab}^* \pm \langle x \rangle_{ab}^* \langle x \rangle_{ab})$$

$$= \frac{1}{2}(2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \pm 2|\langle x\rangle_{ab}|^2\ )$$

$$\Rightarrow \langle x_1x_2\rangle = \langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \pm |\langle x\rangle_{ab}|^2$$

$$\boxed{\langle(x_1 - x_2)^2\rangle = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \mp 2|\langle x\rangle_{ab}|^2}$$

Η οποία είναι μια γενική σχέση για το $\langle(x_1 - x_2)^2\rangle$, την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε για φερμιόνια (θετικό πρόσημο) είτε για μποζόνια (αρνητικό πρόσημο).

Για πηγάδι δυναμικού,

$$\langle x\rangle_n = \frac{L}{2}$$

$$\langle x^2\rangle_n = L^2(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2})$$

$$\langle x\rangle_{nm} = \int_0^L x\psi_n^*(x)\psi_m(x)dx$$

$$= \int_0^L x\ Sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ Sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle_{nm} = \frac{L}{\pi^2}[(-1)^{m+n} - 1]\left(\frac{1}{(m-n)^2} - \frac{1}{(m+n)^2}\right)$$

$$\boxed{= \begin{cases} \dfrac{-8\ m\ n\ L}{\pi^2(m^2 - n^2)^2}, & \alpha\nu\ m + n = 2k + 1 \\ 0, & \alpha\nu\ m + n = 2k \end{cases}}$$

Παρατήρηση:

Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει κάτι το οποίο ήδη έχουμε δει: ότι ο τελεστής της θέσης αναμειγνύει μόνο καταστάσεις με διαφορετική ομοτιμία. Δηλαδή, συμμετρικές με αντισυμμετρικές, ή αλλιώς καταστάσεις n,m όπου

$$m =\ n \pm 1 \text{ ή } m = n \pm 3 \text{ ή } m = n \pm 5 \dots . m = n \pm (2k+1), k\ \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\varsigma$$

Τελικά

$$\langle(x_1 - x_2)^2\rangle = \langle x^2\rangle_a + \langle x^2\rangle_b - 2\langle x\rangle_a\langle x\rangle_b \mp 2|\langle x\rangle_{ab}|^2$$

$$= L^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)\right] - \frac{L^2}{4} \mp 2\left|\frac{-8\ m\ n\ L}{\pi^2(m^2 - n^2)^2}\right|^2$$

$$\boxed{\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)\right] \mp L^2 \frac{128\, m^2\, n^2}{\pi^4 (m^2 - n^2)^4}}$$

Όπου ο δεύτερος όρος υπάρχει μόνο αν οι καταστάσεις n, m έχουν αντίθετη συμμετρία, με το αρνητικό πρόσημο να αντιστοιχεί σε μποζόνια, και το θετικό σε φερμιόνια. Το πρόσημο σε αυτή την περίπτωση μας δείχνει ότι τα φερμιόνια βρίσκονται σε μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους (για τον ίδιο συνδυασμό καταστάσεων με διαφορετική συμμετρία/ομοτιμία) από ότι τα μποζόνια: τα φερμιόνια τείνουν να απωθούνται μεταξύ τους, ενώ τα μποζόνια τείνουν να έλκονται.

*Σε τέτοιο συνδυασμό καταστάσεων, το σύστημα των δυο σωματιδίων συμπεριφέρεται σαν να υπάρχει κάποια δύναμη, η οποία απωθεί ή έλκει τα σωματίδια μεταξύ τους. Την ονομάζουμε **δύναμη ανταλλαγής**. Η δύναμη ανταλλαγής δεν είναι κυριολεκτική δύναμη: είναι μια γεωμετρική έννοια, συνέπεια της συμμετρίας των σωματιδίων.*

Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο, μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες αποστάσεις των δυο σωματιδίων, είτε είναι φερμιόνια, είτε είναι μποζονια.

i) Μποζόνια

Για τη θεμελιώδη κατάσταση των δυο μποζονίων, n=m=1:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{11} = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2}\right)\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0.065L^2}$$

Για την πρώτη διεγερμένη, n=1,m=2:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right)\right] - L^2 \frac{128 * 2^2 * 1}{\pi^4 (2^2 - 1^2)^4}$$

$$= L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2}\right) - L^2 \frac{512}{81\pi^4}$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} - \frac{512}{81\pi^4}\right) = 0.038L^2}$$

Για τη δεύτερη διεγερμένη, n=2,m=2:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right)\right]$$
$$= L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} - \frac{512}{81\pi^4}\right) = 0.141 L^2}$$

ii) Φερμιόνια

Για τη θεμελιώδη κατάσταση των δυο φερμιονίων, n=m=1:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{11} = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2}\right)\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle_{11} = L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right) = 0.065 L^2}$$

Για την πρώτη διεγερμένη, n=1,m=2:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right)\right] + L^2 \frac{128 * 2^2 * 1}{\pi^4 (2^2 - 1^2)^4}$$
$$= L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2}\right) + L^2 \frac{512}{81\pi^4}$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} + \frac{512}{81\pi^4}\right) = 0.168 L^2}$$

Για τη δεύτερη διεγερμένη, n=2,m=2:

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right)\right]$$

$$= L^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = L^2\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8\pi^2} - \frac{512}{81\pi^4}\right) = 0.141L^2}$$

γ) Αν έχουμε δυο ***διακρίσιμα*** *σωματίδια, οι καταστάσεις τους έχουν τη μορφη*

$$\psi_{space_1} = \frac{2}{L}\psi_\alpha(x_1)\psi_b(x_2)$$

Όπου οι διεγερμένες καταστάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν διαφορετικές ιδιοκαταστάσεις του πηγαδιού (ψ_{12}, ψ_{35} κλπ) είναι εκφυλισμένες, πχ

$$\psi_{space_{12}} = \frac{2}{L}\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$$

$$\psi_{space_{21}} = \frac{2}{L}\psi_2(x_1)\psi_1(x_2)$$

Σε αυτη την περίπτωση, έχουμε για την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \overbrace{\int x_1^2\,|\psi_\alpha(x_1)|^2 dx_1}^{\langle x^2 \rangle_a} \overbrace{\int \left|\psi_\beta(x_2)\right|^2 dx_2}^{1}$$

$$\langle x_2^2 \rangle = \overbrace{\int |\psi_\alpha(x_1)|^2 dx_1}^{1} \overbrace{\int x_2^2\,\left|\psi_\beta(x_2)\right|^2 dx_2}^{\langle x^2 \rangle_\beta}$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \overbrace{\int x_1|\psi_\alpha(x_1)|^2 dx_1}^{\langle x \rangle_a} \overbrace{\int x_2\left|\psi_\beta(x_2)\right|^2 dx_2}^{\langle x \rangle_b}$$

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_a + \langle x^2 \rangle_b - 2\langle x \rangle_a \langle x \rangle_b$$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση διακρίσιμων σωματιδίων, ο όρος $\mp 2|\langle x \rangle_{ab}|^2$ δεν υπάρχει. Τα διακρίσιμα σωματίδια δεν υπόκεινται στην «δύναμη ανταλλαγής». Τα φερμιόνια, λοιπόν, *έλκονται περισσότερο από ότι δυο μη ταυτόσημα σωματίδια, ενώ τα μποζόνια λιγότερο από ότι αυτά.*

δ) i) Μποζόνια

Για τη θεμελιώδη κατάσταση,

$$E_1^{(1)} = \langle \psi_1 | H' | \psi_1 \rangle$$

$$= \frac{2}{L} Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)$$

$$= Vo \int_0^L \int_0^L \left[\frac{2}{L} Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]^2 \delta(x_1 - x_2) dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{4}{L^2} Vo \int_0^L \left[Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]^2 dx_2$$

$$= \frac{4}{L^2} Vo \int_0^L Sin^4\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) dx_2$$

Θέτω $a = \pi x_2/L$. Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται

$$E_1^{(1)} = \frac{4}{L^2} Vo \frac{L}{\pi} \int_0^L Sin^4(a) da$$

$$= \frac{\mathrm{Vo}}{8L\pi} [12a - 8\mathrm{Sin}(2a) + \mathrm{Sin}(4a)]_0^{\pi}$$

Όπου οι όροι με συνημίτονα μηδενίζονται για 0 και για π, οπότε,

$$E_1^{(1)} = \frac{12\ \pi\ \mathrm{Vo}}{8L\pi}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_1^{(1)} = \frac{3\mathrm{Vo}}{2L}}$$

Για την πρώτη διεγερμένη,

$$E_2^{(1)} = \langle \psi_2 | H' | \psi_2 \rangle$$

$$E_2^{(1)} = \frac{2}{L^2} Vo \int_0^L \int_0^L \left[Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) + Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right]^2 \delta(x_1 - x_2) dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{2}{L^2} Vo \int_0^L \left[Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) + Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right]^2 dx_2$$

$$= \frac{2}{L^2} Vo \int_0^L \left[Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)^2 Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)^2 + Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right)^2 Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right)^2 \right.$$
$$\left. + 2Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L\sigma}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right] dx_2$$

$$= \frac{8}{L^2} Vo \int_0^L Sin^2\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) Sin^2\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) dx_2$$

Θέτω $a = \pi x_2/L$. *Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται*

$$E_2^{(1)} = \frac{8}{L^2} Vo \frac{L}{\pi} \int_0^\pi Sin^2(\alpha) Sin^2(2\alpha) d\alpha$$

Αλλά $Sin(2a) = 2Sin(a)Cos(a)$

$$E_2^{(1)} = 4\frac{8}{L} Vo \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Sin^2(\alpha)\, Sin^2(\alpha) Cos^2(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{32}{L} Vo \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Sin^2(\alpha)\, Sin^2(\alpha)[1 - Sin^2(\alpha)]\, d\alpha$$

$$= \frac{32}{L} Vo \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [Sin^4(\alpha) \ - Sin^6(a)]\, d\alpha$$

$$= \frac{32}{\pi L} Vo \left[\frac{1}{192} (12a - 3\text{Sin}[2a] - 3\text{Sin}[4a] + \text{Sin}[6a]) \right]_0^\pi$$

Όπου όλοι οι όροι με συνημίτονα μηδενίζονται, οπότε τελικά

$$E_2^{(1)} = \frac{32}{\pi L} Vo \frac{12\pi}{192}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_2^{(1)} = \frac{2Vo}{L}}$$

Για τη δεύτερη διεγερμένη,

$$E_3^{(1)} = \langle \psi_3 | H' | \psi_3 \rangle$$

$$= \frac{2}{L} Sin\left(2\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(2\frac{\pi x_2}{L}\right)$$

$$= Vo \int_0^L \int_0^L \left[\frac{2}{L} Sin\left(2\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(2\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]^2 \delta(x_1 - x_2) dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{4}{L^2} Vo \int_0^L \left[Sin\left(2\frac{\pi x_2}{L}\right) Sin\left(2\frac{\pi x_2}{L}\right)\right]^2 dx_2$$

$$= \frac{4}{L^2} Vo \int_0^L Sin^4\left(2\frac{\pi x_2}{L}\right) dx_2$$

Θέτω $a = 2\pi x_2 / L$. *Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται*

$$E_3^{(1)} = \frac{4}{L^2} Vo \frac{L}{2\pi} \int_0^{2\pi} Sin^4(a) da$$

$$= \frac{\mathrm{Vo}}{16 L\pi} [12a - 8\mathrm{Sin}(2a) + \mathrm{Sin}(4a)]_0^{2\pi}$$

Όπου οι όροι με συνημίτονα μηδενίζονται για 0 και για 2π, οπότε,

$$E_3^{(1)} = \frac{3\,\pi\,\mathrm{Vo}}{2L\pi}$$

$$\boxed{\Rightarrow E_3^{(1)} = \frac{3\,\mathrm{Vo}}{2\,L}}$$

ii) *Φερμιόνια*

Για φερμιόνια, η θεμελιώδης και η πρώτη διεγερμένη κατάσταση είναι οι ίδιες με τις αντίστοιχες των μποζονίων. Έτσι, οι διορθώσεις στην ενέργεια θα είναι αυτές που υπολογίσαμε παραπάνω:

$$E_1^{(1)} = E_3^{(1)} = \frac{3\mathrm{Vo}}{2L}$$

Για την πρώτη διεγερμένη, έχουμε:

$$E_2^{(1)} = \langle \psi_2 | H' | \psi_2 \rangle$$

$$E_2^{(1)} = \frac{2}{L^2} Vo \int_0^L \int_0^L \left[Sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - Sin\left(\frac{2\pi x_1}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right]^2 \delta(x_1 - x_2) dx_1\, dx_2$$

$$= \frac{2}{L^2} Vo \int_0^L \left[Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) - Sin\left(\frac{2\pi x_2}{L}\right) Sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right]^2 dx_2$$

$$\boxed{E_2^{(1)} = 0!}$$

Η διαταραχή $V_o\delta(x_1 - x_2)$ αντιστοιχεί σε μια αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων. Έτσι, για τις δυο καταστάσεις με n=m (ψ_{11}, ψ_{22}) η διόρθωση έχει τιμή $\frac{3\ \mathrm{Vo}}{2\ L}$.

Για την πρώτη διεγερμένη, όμως, η αλλαγή στην ενέργεια έχει τιμή $\frac{2Vo}{L}$, αν τα σωματίδια είναι μποζόνια.

Αν είναι φερμιόνια, η αλληλεπίδρασή τους δεν έχει επίδραση στην ενέργεια!