Λύσεις 8ου Set Ασκήσεων Κβαντομηχανικής Ι

Άσκηση 1

$$E_1^{(1)} = \langle \varphi_1 | H_p | \varphi_1 \rangle$$

Οι καταστάσεις του αδιατάρακτου απειρόβαθου πηγαδιού είναι

$$\left| \varphi_m^{(0)} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} Sin(m\,\pi\,x/a)$$

Και οι ιδιοενέργειες

$$E_m = \frac{m^2 \pi^2 \hbar^2}{2 m_e L^2}$$

Η Χαμιλτονιανή που περιλαμβάνει τη διαταραχή μέσα στο πηγάδι είναι

$$H = H_o + H_p = \frac{p^2}{2m} + qE_0\,x$$

Έτσι λοιπόν

$E_1^{(1)} = \langle \varphi_1 | H_p | \varphi_1 \rangle =$

$= \frac{2}{L} qE_0 \int_0^L Sin\left(\frac{\pi\,x}{L}\right)^2 x\,dx$

$= qE_0 \frac{L}{2}$

$$\left|\varphi_n^{(1)}\right\rangle = \sum_{m\neq 1} \frac{\langle\varphi_m|H_p|\varphi_1\rangle}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}} |\varphi_m\rangle$$

$$\langle\varphi_m|H_p|\varphi_1\rangle = \frac{2qE_0}{L}\int_0^L Sin\left(m\frac{\pi\, x}{L}\right)\, Sin\left(\frac{\pi\, x}{L}\right) x\, dx$$

$$= \frac{qE_0}{L}\int_0^L \{Cos\left[(1-m)\frac{\pi\, x}{L}\right] - Cos\left[(1+m)\frac{\pi\, x}{L}\right] x\, dx$$

$$= \frac{4qLE_0}{\pi^2}\ \frac{(1+(-1)^m)\, m}{(m^2-1)^2}$$

$$E_1^{(0)} - E_m^{(0)} = (1-m^2)\frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}$$

$$\left|\varphi_n^{(1)}\right\rangle = \sum_{m\neq 1} \frac{\langle\varphi_m|H_p|\varphi_1\rangle}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}} |\varphi_m\rangle =$$

$$= \left(\frac{q4LE_0}{\pi^2} / \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}\right) \sum_{m\neq 1} \frac{(1+(-1)^m)\, m}{(1-m^2)(m^2-1)^2} |\varphi_m\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\varphi_n^{(1)}\right\rangle = \ qE_0\frac{L^3m_e}{\pi^4\hbar^2} \sum_{m\neq 1} \frac{(1+(-1)^m)\, m}{(1-m^2)(m^2-1)^2} |\varphi_m\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\varphi_1^{(1)}\right\rangle = \ E_0\frac{L^3m_e}{\pi^4\hbar^2}\ (-0.074\ |\varphi_2\rangle - 0.00059\ |\varphi_4\rangle + \cdots)$$

Άσκηση 2

Η Χαμιλτονιανή που περιλαμβάνει τη διαταραχή μέσα στο πηγάδι είναι

$$H = H_o + H_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{ħ^2\alpha}{2m_e L}\delta(x - L/2)$$

$$E_1^{(1)} = \langle\varphi_1|H_p|\varphi_1\rangle =$$

$$= \frac{2}{L}\frac{ħ^2\alpha}{2m_e L}\int_0^L Sin\left(\frac{\pi\, x}{L}\right)^2 \delta(x - L/2)\, dx$$

$$= \frac{ħ^2\alpha}{m_e L^2} Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$= \frac{ħ^2\alpha}{m_e L^2}$$

$$\left|\varphi_n^{(1)}\right\rangle = \sum_{m\neq 1}\frac{\langle\varphi_m|H_p|\varphi_1\rangle}{E_1^{(0)} - E_m^{(0)}}|\varphi_m\rangle$$

$$\langle\varphi_m|H_p|\varphi_1\rangle = \frac{ħ^2\alpha}{m_e L^2}\int_0^L Sin\left(m\frac{\pi\, x}{L}\right)\, Sin\left(\frac{\pi\, x}{L}\right)\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)dx$$

$$= \frac{ħ^2\alpha}{m_e L^2} Sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)\, Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{ħ^2\alpha}{m_e L^2} Sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_1^{(0)} - E_m^{(0)} = (1 - m^2)\frac{\pi^2 ħ^2}{2m_e L^2}$$

$$\left|\varphi_n^{(1)}\right\rangle = \left(\frac{ħ^2\alpha}{m_e L^2}/\frac{\pi^2ħ^2}{2m_e L^2}\right)\sum_{m\neq 1}\frac{Sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{(1 - m^2)}|\varphi_m\rangle$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi^2}\sum_{m\neq 1}\frac{Sin\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{(1 - m^2)}|\varphi_m\rangle$$

$$\Rightarrow \left|\varphi_1^{(1)}\right\rangle = \frac{\alpha}{\pi^2}(0.125|\varphi_3\rangle - 0.041|\varphi_5\rangle + 0.021|\varphi_7\rangle - 0.0125|\varphi_9\rangle + \cdots)$$

Άσκηση 3

Οι καταστάσεις του αδιατάρακτου αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$\left|\varphi_m^{(0)}\right\rangle = \left(\frac{m_e\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 1/\sqrt{2^m m!}\, H_m\left(\sqrt{\frac{m_e\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{m_e\omega}{2\hbar}x^2}$$

Και οι ιδιοενέργειες

$$E_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

Η Χαμιλτονιανή που περιλαμβάνει τη διαταραχή μέσα στο πηγάδι είναι

$$H = H_o + H_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4$$

$$E_0^{(1)} = \left\langle\varphi_0\middle|H_p\middle|\varphi_0\right\rangle =$$
$$= \langle 0|\alpha x^3 + \beta x^4|0\rangle$$
$$= a\langle 0|x^3|0\rangle + \beta\langle 0|x^4|0\rangle$$

Από το 4ο set έχουμε τα αποτελέσματα:

$$\langle m|\hat{x}^3|m'\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^{3/2}\left(\sqrt{m'(m'-1)(m'-2)}\delta_{m,m'-3} + 3m'\sqrt{m'}\delta_{m,m'-1} + 3(m' + 1)\sqrt{(m+1)}\delta_{m,m'+1} + \sqrt{(m'+3)(m'+2)(m'+1)}\delta_{m,m'+3}\right)$$

$$\langle m|\hat{x}^4|m'\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^2\left[\sqrt{m'(m'-1)(m'-2)(m'-3)}\,\delta_{m,m'-4} + 2(2m'-1)\sqrt{m'(m'-1)}\delta_{m,m'-2} + 3(2m'^2 + 2m' + 1)\delta_{m,m'} + 4(m'+1)\sqrt{(m'+1)(m'+2)}\delta_{m,m'+2} + \sqrt{(m'+1)(m'+2)(m'+3)(m'+4)}\delta_{m,m'+4}\right]$$

Άρα $E_0^{(1)} = a\langle 0|x^3|0\rangle + \beta\langle 0|x^4|0\rangle$

$$= 0 + 3\beta\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^2$$

Όπου αντικαταστήσαμε τα m, m' με 0, για να βρούμε τη μέση τιμή για τη θεμελιώδη κατάσταση.

$$\Rightarrow E_1^{(1)} = 3\beta\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^2$$

$$\left|\varphi_n^{(1)}\right\rangle = \sum_{m\neq 1}\frac{\langle\varphi_m|H_p|\varphi_0\rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}|\varphi_m\rangle$$

$\langle\varphi_m|H_p|\varphi_0\rangle = a\langle m|x^3|0\rangle + \beta\langle m|x^4|0\rangle$

$$= a\left[\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\delta_{m,1} + \sqrt{6}\,\delta_{m,3}\right)\right] + b\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^2\left[4\sqrt{2}\delta_{m,2} + \sqrt{24}\,\delta_{m,4}\right]$$

$$E_0^{(0)} - E_m^{(0)} = \frac{1}{2}\,\hbar\omega - \left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = m\,\hbar\omega$$

$$\left|\varphi_0^{(1)}\right\rangle = \sum_{m\neq 1}\frac{\langle\varphi_m|H_p|\varphi_0\rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}|\varphi_m\rangle$$

$$= \sum_{m\neq 0} -\frac{a\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\delta_{m,1} + \sqrt{6}\,\delta_{m,3}\right) + b\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^2\left(4\sqrt{2}\delta_{m,2} + \sqrt{24}\,\delta_{m,4}\right)}{m\,\hbar\omega}|\varphi_m\rangle =$$

$$|0\rangle = \left|0^{(0)}\right\rangle - \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^{\frac{3}{2}}\left[3a\left|1^{(0)}\right\rangle + 2\sqrt{2}\,b\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left|2^{(0)}\right\rangle + \frac{\sqrt{6}}{3}a\left|3^{(0)}\right\rangle\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{24}}{4}\,b\left(\frac{\hbar}{2m_e\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\left|4^{(0)}\right\rangle\right]$$

Άσκηση 4

Η Χαμιλτονιανή που περιλαμβάνει τη διαταραχή μέσα στο πηγάδι είναι

$$H = H_o + H_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + qE_0\, x$$

$$E_0^{(1)} = \langle \varphi_0 | H_p | \varphi_0 \rangle =$$
$$= qE_0 \langle 0 | x | 0 \rangle$$

Από το 4ο Set,

$$\langle m | \hat{x} | m' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_e\omega}} \left(\sqrt{m'}\, \delta_{m,m'-1} + \sqrt{m'+1}\, \delta_{m,m'+1} \right)$$

$$E_0^{(1)} = 0$$

$$\left| \varphi_n^{(1)} \right\rangle = \sum_{m \neq 0} \frac{\langle \varphi_m | H_p | 0 \rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}} |\varphi_m\rangle$$

$$\langle \varphi_m | H_p | 0 \rangle = qE_0 \langle \varphi_m | x | 0 \rangle$$
$$= qE_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m_e\omega}} \delta_{m,1}$$

$$E_0^{(0)} - E_m^{(0)} = -m\hbar\omega$$

$$\left| \varphi_0^{(1)} \right\rangle = -\frac{qE_0}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_e\omega}} \sum_{m \neq 0} \frac{\delta_{m,1}}{m} |\varphi_m\rangle$$

Και τελικά

$$|0\rangle = \left| 0^{(0)} \right\rangle - \frac{qE_0}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_e\omega}} \left| 1^{(0)} \right\rangle$$