7^{o} Set ασκήσεων Κβαντομηχανικής Ι

30/11/2016

Άσκηση 1

a)

$$j_1 = 1, j_2 = 1$$

$$|j_1 - j_2| = 0$$
$$j_1 + j_2 = 2$$

Άρα $j = 0, 1, 2$

Και οι επιτρεπτές καταστάσεις είναι

$|2,2\rangle, |2,1\rangle, |2,0\rangle, |2,-1\rangle, |2,-2\rangle$
$|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$
$|0,0\rangle$

Για τη συζευγμένη κατάσταση $|2,2\rangle$, ο μοναδικός συνδυασμός m_1και m_2 που ικανοποιεί τη σχέση $m_1 + m_2 = m$ είναι $m_1 = m_2 = 1$, και έτσι

$$\boxed{\begin{gathered} |2,2\rangle = |1,1;1,1\rangle \\ \langle |1,1;1,1|2,2\rangle = 1 \end{gathered}}$$

$j_-|2,2\rangle = (j_{1-} + j_{2-})|1,1;1,1\rangle$ (1)

$j_-|j,m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,|j,m-1\rangle$
$j_-|2,2\rangle = \sqrt{(2+2)(2-2+1)}\,|2,1\rangle$
$j_-|2,2\rangle = 2|2,1\rangle$ (2)

Διδάσκων:Πέτρος Ρακιτζής
Βοηθός: Αλέξανδρος Σπηλιώτης

$j_{1-}|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1+1)}|j_1, j_2; m_1-1, m_2\rangle$
$j_{1-}|1,1;1,1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)}|1,1;0,1\rangle$
$j_{1-}|1,1;1,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;0,1\rangle$ (3)

$j_{2-}|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = \sqrt{(j_2+m_2)(j_2-m_2+1)}|j_1, j_2; m_1, m_2-1\rangle$
$j_{2-}|1,1;1,1\rangle = \sqrt{(1+1)(1-1+1)}|1,1;1,0\rangle$
$j_{2-}|1,1;1,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;1,0\rangle$ (4)

Και η (1) γίνεται από τις (2, 3, 4)

$2|2,1\rangle = \sqrt{2}\,(|1,1;1,0\rangle + |1,1;0,1\rangle)$

$$\boxed{|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;0,1\rangle}$$

<u>Για το $|2,0\rangle$:</u>

$j_-|2,1\rangle = \sqrt{6}\,|2,0\rangle$

$j_{1-}|1,1;0,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;-1,1\rangle$

$j_{1-}|1,1;1,0\rangle = \sqrt{2}|1,1;0,0\rangle$

$j_{2-}|1,1;0,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;0,0\rangle$

$j_{2-}|1,1;1,0\rangle = \sqrt{2}|1,1;1,-1\rangle$

$$\sqrt{6}|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}|1,1;-1,1\rangle + \sqrt{2}|1,1;0,0\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}|1,1;1,-1\rangle + \sqrt{2}|1,1;0,0\rangle\right)$$

$$\boxed{|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1,1;-1,1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\,|1,1;0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1,1;1,-1\rangle}$$

<u>Για το $|2,-1\rangle$:</u>

$$j_{-}|2{,}0\rangle = \sqrt{6}\,|2,-1\rangle$$

$$j_{1-}|1{,}1;-1{,}1\rangle = 0$$

$$j_{1-}|1{,}1;0{,}0\rangle = \sqrt{2}|1{,}1;-1{,}0\rangle$$

$$j_{1-}|1{,}1;1,-1\rangle = \sqrt{2}|1{,}1;0,-1\rangle$$

$$j_{2-}|1{,}1;-1{,}1\rangle = \sqrt{2}|1{,}1;-1{,}0\rangle$$

$$j_{2-}|1{,}1;0{,}0\rangle = \sqrt{2}|1{,}1;0,-1\rangle$$

$$j_{2-}|1{,}1;1,-1\rangle = 0$$

$$\sqrt{6}|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2}|1{,}1;-1{,}0\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{2}|1{,}1;-1{,}0\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{2}|1{,}1;0,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{2}|1{,}1;0,-1\rangle$$

$$\sqrt{6}|2,-1\rangle = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}|1{,}1;-1{,}0\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{2}|1{,}1;-1{,}0\rangle + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}|1{,}1;0,-1\rangle$$

$$|2,-1\rangle = \frac{3\sqrt{2}}{6}|1{,}1;-1{,}0\rangle + \frac{3\sqrt{2}}{6}|1{,}1;0,-1\rangle$$

$$\boxed{|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1{,}1;-1{,}0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1{,}1;0,-1\rangle}$$

<u>Για το $|2,-2\rangle$:</u>

$$j_{-}|2,-1\rangle = 2|2,-2\rangle$$

$$j_{1-}|1{,}1;0,-1\rangle = \sqrt{2}|1{,}1;-1,-1\rangle$$

$$j_{1-}|1{,}1;-1{,}0\rangle = 0$$

$j_{2-}|1,1;0,-1\rangle = 0$

$j_{2-}|1,1;-1,0\rangle = \sqrt{2}|1,1;-1,-1\rangle$

$2|2,-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}2\sqrt{2}|1,1;-1,-1\rangle$

$$\boxed{|2,-2\rangle = |1,1;-1,-1\rangle}$$

Για την εύρεση των $|1,m\rangle$, ξεκινάμε με το $|1,1\rangle$ και βλέπουμε ότι για να ισχύει η σχέση $m_1 + m_2 = m$, επιτρεπτές είναι μόνο οι καταστάσεις
$|1,1;0,1\rangle$ και $|1,1;1,0\rangle$

Θα ισχύει, λοιπόν $|1,1\rangle = \alpha|1,1;1,0\rangle + \beta|1,1;0,1\rangle$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης, έχουμε

$\langle 1,1|1,1\rangle = \alpha^2\langle 1,1;1,0|1,1;1,0\rangle + \beta^2\langle 1,1;0,1|1,1;0,1\rangle$

$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (5)

Θα χρησιμοποιήσουμε μια κατάσταση που περιέχει τις ίδιες στροφορμές, συγκεκριμένα τη $|2,1\rangle$

$\langle 1,1|2,1\rangle = (\langle 1,1;1,0|\alpha + \langle 1,1;0,1|\beta)(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;0,1\rangle)$
$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\langle 1,1;1,0|1,1;1,0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\langle 1,1;,1|1,1;0,1\rangle$
$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ (6)

Συνδυάζοντας τις (5,6)

$$a = -\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Από τη σύμβαση του προσήμου των Clebsch-Gordan, πρέπει να έχουμε

$\langle j_1, j_2; j_1, j - j_1 | j, j\rangle = \langle 1,1; 1,0 | 1,1\rangle$ θετικό
Άρα

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;0,1\rangle}$$

$j_-|1,1\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle$

$j_{1-}|1,1;1,0\rangle = \sqrt{2}|1,1;0,0\rangle$
$j_{1-}|1,1;0,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;-1,1\rangle$

$j_{2-}|1,1;1,0\rangle = \sqrt{2}|1,1;1,-1\rangle$
$j_{2-}|1,1;0,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;0,0\rangle$

$$\sqrt{2}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,|1,1;0,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,|1,1;0,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}|1,1;-1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}|1,1;1,-1\rangle$$

$$\boxed{|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;-1,1\rangle}$$

$j_-|1,0\rangle = \sqrt{2}\,|1,-1\rangle$

$j_{1-}|1,1;1,-1\rangle = \sqrt{2}|1,1;0,-1\rangle$
$j_{1-}|1,1;-1,1\rangle = 0$

$j_{2-}|1,1;1,-1\rangle = 0$
$j_{2-}|1,1;-1,1\rangle = \sqrt{2}|1,1;-1,0\rangle$

$$\sqrt{2}|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}|1,1;0,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}|1,1;-1,0\rangle$$

$$\boxed{|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;0,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;-1,0\rangle}$$

Για την εύρεση του $|0,0\rangle$, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή που ακολουθήσαμε για το $|1,1\rangle$
Βρίσκουμε ότι

$$|0,0\rangle = \alpha|1,1;1,-1\rangle + \beta|1,1;-1,1\rangle + \gamma|1,1;0,0\rangle \qquad (7)$$

Από τη συνθήκη κανονικοποίησης, έχουμε

$$\langle 0,0|0,0\rangle = \alpha^2\langle 1,1;1,-1|1,1;1,-1\rangle + \beta^2\langle 1,1;-1,1|1,1;-1,1\rangle + \gamma^2\langle 1,1;0,0|1,1;0,0\rangle$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad (8)$$

Ενώ,

$$\langle 0,0|2,0\rangle = (\langle 1,1;1,-1|\alpha + \langle 1,1;-1,1|\beta + \langle 1,1;0,0|\gamma)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|1,1;-1,1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|1,1;0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1,1;1,-1\rangle\right)$$

$$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{6}}\langle 1,1;1,-1|1,1;1,-1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{6}}\langle 1,1;-1,1|1,1;-1,1\rangle + \frac{2\gamma}{\sqrt{6}}\langle 1,1;0,0|1,1;0,0\rangle$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{6}} + \frac{\beta}{\sqrt{6}} + \frac{2\gamma}{\sqrt{6}} = 0$$

(9)

Χρειαζόμαστε άλλη μια σχέση:

$$\langle 0,0|1,0\rangle = (\langle 1,1;1,-1|\alpha + \langle 1,1;-1,1|\beta + \langle 1,1;0,0|\gamma)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1;-1,1\rangle\right)$$

$$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\langle 1,1;1,-1|1,1;1,-1\rangle - \frac{\beta}{\sqrt{2}}\langle 1,1;-1,1|1,1;-1,1\rangle$$

$$\alpha = \beta$$

(10)
Από τις (8, 9)

$$2\alpha^2 + \gamma^2 = 1$$
$$\frac{2\alpha}{\sqrt{6}} + \frac{2\gamma}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\alpha = -\gamma$$
$$3\alpha^2 = 1$$

$$a = \beta = -\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Από τη σύμβαση του προσήμου των Clebsch-Gordan, πρέπει να έχουμε

$\langle j_1, j_2; j_1, j - j_1 | j, j\rangle = \langle 1,1; 1,-1|0,0\rangle$ θετικό

Άρα

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1;1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1;-1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1,1;0,0\rangle}$$

b)

$$j_1 = 1/2, \qquad j_2 = 1$$

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Άρα οι επιτρεπτές καταστάσεις σύζευξης είναι

$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$

$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

Οι οποίες αναλύονται σε:

$$\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2};1,\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2};-1,-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,\frac{1}{2};1,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,\frac{1}{2};0,\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,\frac{1}{2};0,-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,\frac{1}{2};-1,\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$j_1 = 1/2, \qquad j_2 = 3/2$$

$$j = 1,2$$

Άρα οι επιτρεπτές καταστάσεις σύζευξης είναι

$|2,2\rangle, |2,1\rangle, |2,0\rangle, |2,-1\rangle, |2,-2\rangle$

$|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle$

Οι οποίες αναλύονται ως εξής:

$$|2,2\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$|2,1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$|2,-1\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$|2,-2\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$|1,1\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$|1,-1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle - \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2},\frac{3}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

‘Ασκηση 2

a) *Από την άσκηση 1α βλέπουμε ότι η σύζευξη από* $|1,1;0,0\rangle$ *σε* $|1,0\rangle$ *δεν είναι δυνατή, καθώς η ανάλυση της* $|1,0\rangle$ *δεν περιέχει την* $|1,1;0,0\rangle$*. Άρα η πιθανότητα είναι 0.*
b) *Αντίστοιχα, από την 1α, παίρνουμε ότι* $\langle 1,1;1,-1|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$*, οπότε η πιθανότητα αυτής της σύζευξης είναι* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50\%$
c) *Από την 1β,* $\left\langle \frac{1}{2},1;\frac{1}{2},0\middle|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$*. Άρα η πιθανότητα* $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 66\%$
d) *Από την 1γ,* $\left\langle \frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle = \frac{1}{2}$*. Άρα η πιθανότητα* $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 25\%$

‘Ασκηση 3

Λόγω της πραγματικότητας των ιδιοτιμών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα clebsch-gordan coefficients για να περιγράψουμε την περίπτωση όπου έχουμε δυο γνωστές στροφορμές που συζεύγνυνται, και να βρούμε τις πιθανές καταστάσεις τις οποίες παράγουν και τις πιθανότητές τους. Έτσι,

$$|1,1;0,0\rangle_0 = \frac{2}{\sqrt{6}}\,|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,0\rangle$$

$$|1,1;0,0\rangle_t = \frac{2}{\sqrt{6}}\,|2,0\rangle e^{-iE_2t/\hbar} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,0\rangle e^{-iE_0t/\hbar}$$

Το εσωτερικό γινόμενο της χρονοεξαρτημένης σύζευξης με την αρχική σύζευξη:

$${}_t\langle 1,1;0,0|1,1;0,0\rangle_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\,e^{\frac{iE_2t}{\hbar}}\langle 2,0| - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{iE_0t}{\hbar}}\langle 0,0|\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\,|2,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,0\rangle\right) =$$

$$= \frac{2}{3}e^{\frac{iE_2t}{\hbar}}\langle 2,0|2,0\rangle + \frac{1}{3}e^{\frac{iE_0t}{\hbar}}\langle 0,0|0,0\rangle$$

$${}_t\langle 1,1;0,0|1,1;0,0\rangle_0 = \frac{2}{3}e^{\frac{iE_2t}{\hbar}} + \frac{1}{3}e^{\frac{iE_0t}{\hbar}}$$

Και η χρονοεξαρτώμενη πιθανότητα:

$$
\begin{aligned}
|\,_t\langle 1,1;0,0|1,1;0,0\rangle_0|^2 &= \left(\frac{2}{3}e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}}+\frac{1}{3}e^{\frac{iE_0 t}{\hbar}}\right)\left(\frac{2}{3}e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}\right) \\
&= \frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\left(e^{\frac{i(E_2-E_0)t}{\hbar}}+e^{-\frac{i(E_2-E_0)t}{\hbar}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{|\,_t\langle 1,1;0,0|1,1;0,0\rangle_0|^2 = \frac{5}{9}+\frac{4}{9}Cos\left(\frac{E_2-E_0}{\hbar}\right)}
$$