Πανεπιστήμιο Κρήτης,
Τμήμα Φυσικής

# Κβαντομηχανική Ι

# 6ο Σετ Ασκήσεων

## Άσκηση 1

a) Τρόπος α':

Λύνουμε όλους (ή έστω μερικούς από) τους συνδυασμούς $[l_i, r_j]$:

$$[l_x, x] = 0$$
$$[l_y, y] = 0$$
$$[l_z, x] = i\,\hbar\, y$$

Κ.ο.κ., και συμπεραίνουμε ότι

$$[l_i, r_j] = \varepsilon_{ijk} i\,\hbar\, r_k$$

Τρόπος β'

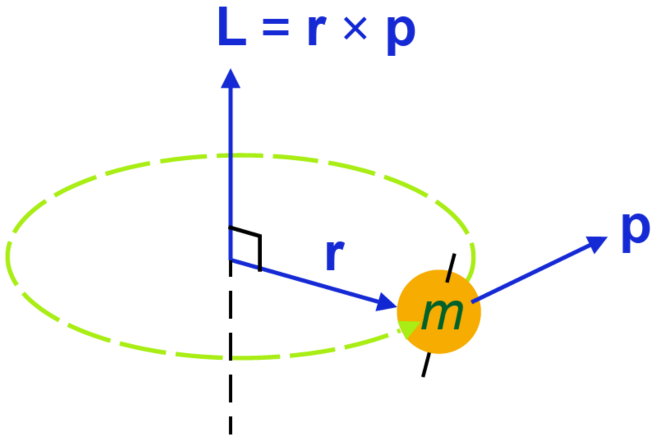
Η στροφορμή δίνεται από το $l = r\ \times p$

$\Rightarrow l_i = r_j \times p_k = \varepsilon_{ijk} r_j p_k$

Όπου $\varepsilon_{ijk}$ είναι το τριδιάστατο σύμβολο Levi-Civita, το οποίο δίνεται από την έκφραση:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \ \ \alpha\nu\ i,j,k\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota\varepsilon\varsigma\ \mu\varepsilon\tau\alpha\theta\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \tau o\upsilon\ (1,2,3) \\ -1, \alpha\nu\ i,j,k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \mu\varepsilon\tau\alpha\theta\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \tau o\upsilon\ (1,2,3) \\ 0, \alpha\nu\ \delta\upsilon o\ \acute{\eta}\ \tau\rho\varepsilon\iota\varsigma\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\kappa\tau\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma o\iota \end{cases}$$

Δηλαδή, η στροφορμή θα έχει συνιστώσα x, αν η ακτίνα της κίνησης είναι στην κατεύθυνση του y, και η ορμή στην κατεύθυνση του z, και ούτω καθ’εξής.




Με αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε τους μεταθέτες:

a) $[l_i, r_j] = [\varepsilon_{ij'k} r_{j'}\, p_k, r_j]$
$= \varepsilon_{ij'k}[r_{j'} p_k, r_j]$
$= \varepsilon_{ij'k}([r_j, r_{j'}]p_k + r_{j'}[p_k, r_j])$
$= -\varepsilon_{ij'k} i\,\hbar\, r_{j'}\delta_{kj}$
$= -\varepsilon_{ij'j} i\,\hbar\, r_{j'}$
$= -\varepsilon_{ikj} i\,\hbar\, r_k$
$= \varepsilon_{ijk} i\,\hbar\, r_k$

# Άσκηση 2

a) $Y_2^2 = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta\, e^{2i\varphi}$

$$L_- = -\hbar\, e^{-i\varphi}\left(\frac{d}{d\theta} - i\, Cot\theta\, \frac{d}{d\varphi}\right)$$

$$L_- Y_2^2 = -\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, e^{-i\varphi}\left[\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\, e^{2i\varphi}) - i\, Cot\theta\, \frac{d}{d\varphi}(\sin^2\theta\, e^{2i\varphi})\right]$$

$$= -\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, e^{-i\varphi}\left[e^{2i\varphi}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta) - i\cot\theta\sin^2\theta\,\frac{d}{d\varphi}(e^{2i\varphi})\right]$$

$$= -\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, e^{-i\varphi}\left[e^{2i\varphi}(2sin\,\theta\cos\theta) - i\cot\theta\sin^2\theta\ \ (2i\, e^{2i\varphi})\right]$$

$$= -\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, e^{-i\varphi}\left[e^{2i\varphi}(2sin\,\theta\cos\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta\ \ (2\, e^{2i\varphi})\right]$$

$$L_{-}\mathrm{Y}_2^2 = -\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, 4\, e^{i\varphi}\, sin\,\theta \cos\theta$$

*Για να βρούμε την κανονικοποιημένη σφαιρική αρμονική* $\mathrm{Y}_2^1$ *χρησιμοποιούμε τη σχέση κανονικοποίησης:*

$$L_{-}\mathrm{Y}_2^2 = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,\mathrm{Y}_2^1$$

$$\Rightarrow L_{-}\mathrm{Y}_2^2 = 2\,\hbar\,\mathrm{Y}_2^1$$

$$2\,\hbar\,\mathrm{Y}_2^1 = -\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, 4\, e^{i\varphi}\, sin\,\theta \cos\theta$$

$$\mathrm{Y}_2^1 = -2\left(\frac{15}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}\, sin\,\theta \cos\theta$$

$$\boxed{\mathrm{Y}_2^1 = -\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}\, sin\,\theta \cos\theta}$$

Για την εύρεση της $\mathrm{Y}_2^0$, χτυπάμε το $L_{-}$ ξανά στην τελική μορφή της $\mathrm{Y}_2^1$ που βρήκαμε.

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, e^{-i\varphi} \left[\frac{d}{d\theta}\left(e^{i\varphi}\, sin\,\theta \cos\theta\right) - i\; Cot\theta\, \frac{d}{d\varphi}\left(e^{i\varphi}\, sin\,\theta \cos\theta\right)\right]$$

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, e^{-i\varphi}\left[e^{i\varphi}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - i^2\;\; e^{i\varphi}\; cot\theta\, sin\,\theta\cos\theta\right]$$

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, \left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \;\cos^2\theta\right]$$

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, (2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, (2\cos^2\theta - 1 + cos^2\,\theta)$$

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, (3\cos^2\theta - 1)$$

$$L\_\mathrm{Y}_2^1 = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \hbar\, (3\cos^2\theta - 1)$$

Και κανονικοποιούμε:

$$L_{-}\mathrm{Y}_2^1 = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\mathrm{Y}_2^0$$

$$L_{-}\mathrm{Y}_2^1 = \hbar\sqrt{6}\,\mathrm{Y}_2^0$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{Y}_2^0 = \left(\frac{15}{48\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\ (3\cos^2\theta - 1)$$

$$\boxed{\mathrm{Y}_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\ (3\cos^2\theta - 1)}$$

*Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και τις υπόλοιπες σφαιρικές αρμονικές, μέχρι m=-2, και για l=3,m=3,…,-3.*

*c)Η ανάπτυξη των συναρτήσεων στη βάση των σφαιρικών αρμονικών μπορεί να γίνει με δυο τρόπους. Ο πρώτος είναι να βρούμε άμεσα ένα συνδυασμό σφαιρικών αρμονικών που να δίνει τη συνάρτηση προς ανάπτυξη, χρησιμοποιώντας αρχικά τα πολυώνυμα Legendre που «περιέχουν» τη συνάρτηση. Αυτή είναι μια απλή μέθοδος που λειτουργεί με απλές συναρτήσεις, όπως το* $Cos^2\theta$*, αλλά δε λειτουργεί για πιο σύνθετες συναρτήσεις, όπως θα δούμε στο υποερώτημα e. Θα βρούμε την ανάπτυξη της συναρτησης* $Cos^2\theta$ *με αυτό τον τρόπο, και στα επόμενα υποερωτήματα θα χρησιμοποιήσουμε μια πιο γενική μέθοδο.*

*Κοιτώντας τον πίνακα των γενικευμένων πολυωνύμων Legendre (πίνακας 4.2 α, Griffiths) βλέπουμε ότι το $P_2^0$ είναι ένα σχεδόν «καθαρό» $Cos^2\theta$, οπότε περιμένουμε ότι η σφαιρική αρμονική $Y_2^0$ θα έχει μεγάλη συνεισφορά στο ανάπτυγμα.*

$$P_2^0(Cos\theta) = \frac{1}{2}(3Cos^2\theta - 1) \Rightarrow Cos^2\theta = \frac{2}{3}P_2^0(Cos\theta) + \frac{1}{3}$$

*Όπου μας περισσεύει ένας παράγοντας 1/3, ο οποίος όμως είναι ίσος με $P_0^0(Cos\theta)/3$.*
*Έτσι,*

$$Cos^2\theta = \frac{2}{3}P_2^0(Cos\theta) + \frac{1}{3}P_0^0(Cos\theta)$$

*Και έχουμε αναπτύξει τη ζητούμενη συνάρτηση στη βάση των πολυωνύμων Legendre. Η μεταφορά στη βάση των σφαιρικών αρμονικών είναι απλή:*

$$Y_l^m = C_l^m P_l^m(Cos\theta)e^{im\varphi}$$

*Με* $C_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$

*Και*

$$Y_0^0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}P_0^0(Cos\theta)$$
$$Y_2^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}}P_2^0(Cos\theta)$$

*Και καταλήγουμε σε μια σχέση συναρτήσει των σφαιρικών αρμονικών:*

$$Cos^2\theta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y_2^0 + \frac{2\sqrt{\pi}}{3}Y_0^0$$

$$Cos^2\theta = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}Y_2^0 + Y_0^0\right)$$

d) *Η συνάρτηση $Cos^3\theta$ μπορεί επίσης να αναπτυχθεί με τον τρόπο που αναλύσαμε στο προηγούμενο υποερώτημα. Θα χρησιμοποιήσουμε όμως μια γενικότερη μέθοδο, η οποία θα φανεί πολύ χρήσιμη στο επόμενο υποερώτημα.*

*Επειδή οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν μια πλήρη βάση, καθε συνάρτηση μπορεί να γραφτεί σαν ανάπτυγμα σφαιρικών αρμονικών. Η σχέση αυτή γράφεται ως:*

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm}\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

*Από όπου προκύπτει για τις σταθερές $a_{lm}$*

$$a_{lm} = \int f(\theta,\varphi)\, Y_l^m(\theta,\varphi)^* d\Omega$$

*Όπου dΩ η στερεά γωνία. Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει εξάρτηση από το φ στη συναρτηση, οι μεταβλητές $a_{lm}$ θα δίνονται από το*

$$a_{lm} = C_{lm} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta) P_l^0(Cos\theta) \sin\theta \ d\theta$$

*Όπου χρησιμοποιήσαμε την ανάλυση των σφαιρικών αρμονικών σε πολυώνυμα Legendre, την οποία είδαμε στο προηγούμενο υποερώτημα, και την ανάλυση της στερεάς γωνίας*

$$\int d\Omega = \int \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

*Έτσι, έχουμε δυο ολοκληρώματα. Το ένα έχει απλή λύση*

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} d\varphi = 2\pi \, \delta_{m,0}$$

*Από όπου φαίνεται ότι οι σφαιρικές αρμονικές που θα συνεισφέρουν θα είναι αυτές με m=0, ενώ το άλλο ολοκλήρωμα είναι στο διάστημα 0 έως π, το οποίο σημαίνει ότι αν η έκφραση* $f(\theta)\ Sin\theta\ P_l^0(Cos\theta)$ *είναι αντισυμμετρική εκεί, το ολοκλήρωμα θα είναι 0. Σε αυτή την περίπτωση,* $f(\theta) = Cos^3\theta$*, άρα δε θα έχουμε συνεισφορά από συμμετρικά πολυώνυμα Legendre, δηλαδή για l άρτιο:*

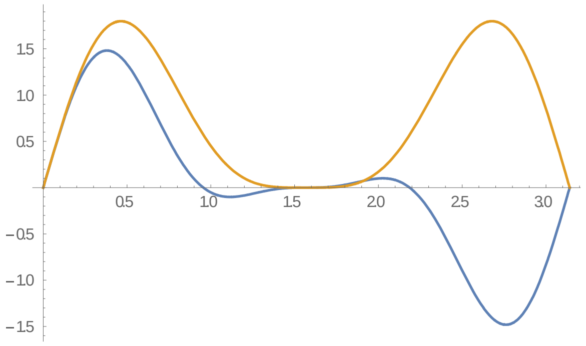



*Figure 1Μπλε: η έκφραση μέσα στο ολοκλήρωμα για πολυώνυμο $P_2^0$ . Σε αυτό το διάστημα, η έκφραση είναι αντισυμμετρική, άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. Κίτρινό: η αντίστοιχη (συμμετρική) έκφραση για πολυώνυμο $P_1^0$*

*Συνεισφορά λοιπόν θα έχουν μόνο περιττά πολυώνυμα Legendre, και μάλιστα όχι όλα. Τα πολυώνυμα βαθμού 5 και πάνω δίνουν ολοκλήρωμα στη γωνία ϑ ίσο με 0. Κάνοντας, λοιπόν, τα ολοκληρώματα για l=1,3 , βρίσκουμε:*

$$a_{10} = \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^3\theta \, Y_1^0 \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} C_{10} \sin\theta \cos^4\theta \;\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{3\pi}/5$$

$$a_{30} = 2\pi \int_0^{\pi} C_{30} \sin\theta \cos^3\theta \, \frac{1}{2}(-3cos\,\theta + 5\cos^3\theta) \;\, d\theta$$

$$a_{30} = \frac{4\sqrt{\pi}}{5\sqrt{7}}$$

Και τελικά

$$Cos^3\theta = \frac{2\sqrt{\pi}}{5}\left(\sqrt{3}Y_1^0 + \frac{2}{\sqrt{7}}Y_3^0\right)$$

*Υπενθυμίζω ότι, επειδή οι συναρτήσεις που μας ζητάται να αναπτύξουμε είναι απλές και περιέχονται ως έχουν σε σφαιρικές αρμονικές, θα μπορούσαμε να κάνουμε την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο υποερώτημα, και να βγάλουμε την ίδια απάντηση. Αυτό όμως δε συμβαίνει στο επόμενο υποερώτημα*

*e) Η συνάρτηση $cos^2\theta \sin\theta$ που μας ζητάται εδώ, εμπεριέχεται ως έχει μόνο σε σφαιρικές αρμονικές με $m \neq 0$. Έτσι, αν κάνουμε τη διαδικασία του υποερωτήματος c, θα εκφράσουμε αυτή τη συνάρτηση ως προς σφαιρικές αρμονικές χωρίς συμμετρία γύρω απο το φ, ενώ η ζητούμενη συνάρτηση δεν εξαρτάται από το φ. Θα ήταν, λοιπόν, φυσικά λάθος. Θα πρέπει ξανά να βρούμε απευθείας, λύνοντας τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, τους συντελεστες $a_{lm}$. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι αντισυμμετρική, άρα το ολοκλήρωμα για στερεά γωνία 0 έως π θα είναι αντισυμμετρικό αν l=1,3,5… Άρα θα έχουμε συνεισφορά μόνο από άρτιους όρους. Από ποιους; Από πολλούς.*

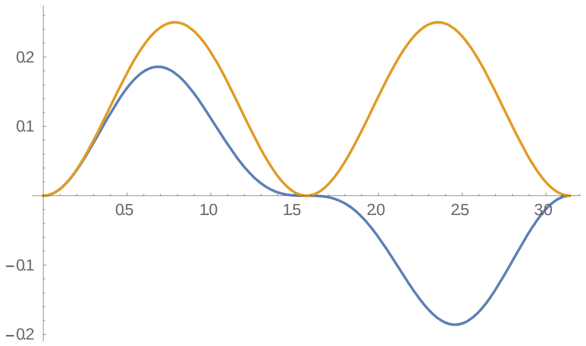



*Figure 2Μπλε: έκφραση του ολοκληρώματος για στερεά γωνία από 0 έως π, για πολυώνυμο Legendre $P_1^0$ . Η έκφραση είναι αντισυμμετρική, άρα το ολοκλήρωμα 0. Κίτρινο: αντίστοιχη έκφραση για $P_1^0$. Το ολοκλήρωμα δεν είναι 0.*

$$a_{00} = \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \sin\theta \, Y_0^0 \, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta \, Y_0^0 \, d\theta$$
$$= 0.696$$

$$Και\ a_{20} = 0.389,\ a_{40} = -0.277, a_{60} = -0.063, \ldots$$

Δηλαδή, η συνεισφορά των ανώτερων σφαιρικών αρμονικών (πάντα για m=0) συνεχώς μικραίνει, αλλά υπάρχει. Δηλαδή, όσο προσθέτουμε σφαιρικές αρμονικές, τείνουμε προς το να δημιουργούμε τη συνάρτηση $\cos^2\theta \sin\theta$:

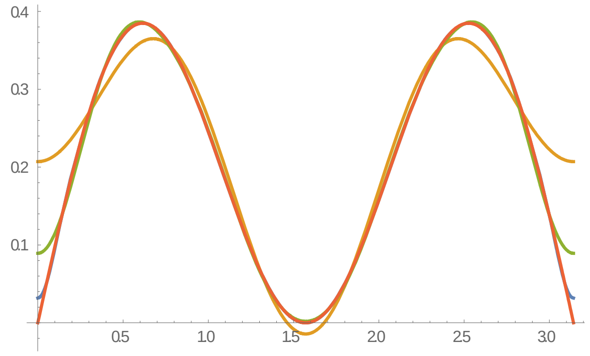



*Figure 3 Η συνάρτηση $\cos^2\vartheta \sin\vartheta$ (κόκκινο) και προσεγγίσεις της με 4, 10 και 30 όρους σφαιρικών αρμονικών με άρτια l*

# Άσκηση 3

$$\left\langle 2m \middle| \hat{\mathrm{T}} \middle| 2m' \right\rangle \; είναι \; ένας \; πίνακας \; 5x5, γιατί \; για \; j = 2, m = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$\boxed{j_z}$$

$\langle 2m|\, j_z|2m'\rangle$

Για m=m'=2,

$\langle 2,2|j_z|2,2\rangle = \langle 2,2|m'|2,2\rangle = 2$

(φυσικό σύστημα μονάδων, $\hbar = 1$)

$\langle 2,2|j_z|2,1\rangle = \langle 2,2|j_z|2,0\rangle = \langle 2,2|j_z|2,-1\rangle = \langle 2,2|j_z|2,-2\rangle = 0$

Όμοια, $\langle 2,1|j_z|2,1\rangle = 1$

Και γενικά,

$\langle 2,m|j_z|2,m'\rangle = m\delta_{mm'}$

*Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο:*

$$\langle jm|j_z|jm'\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{j_+}$$

$$\langle 2,2|j_+|2,2\rangle = 0$$

$$\langle 2,2|j_+|2,1\rangle = \sqrt{2(2+1)-1(1+1)} = 2\hbar$$

*Και γενικά*

$$\langle j,m|j_+|j,m'\rangle = \sqrt{j(j+1)-m'(m'+1)}\delta_{m-1\,m'}$$

*Άρα ο πίνακας είναι*

$$\langle 2,m|j_+|2,m'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{j_-}$$

$$\langle j,m|j_-|j,m'\rangle = \sqrt{j(j+1)-m'(m'-1)}\delta_{m+1\,m'}$$

*Γιατί τα μη μηδενικά στοιχεία θα είναι αυτά για τα οποία το m' θα είναι κατά ένα μεγαλύτερο του m.*

*Άρα ο πίνακας είναι*

$$\langle jm|j_-|jm'\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{j_x}$$

$$\langle jm|j_x|jm'\rangle = \left\langle jm \middle| \frac{j_+ + j_-}{2} \middle| jm' \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle jm|j_+|jm'\rangle + \langle jm|j_-|jm'\rangle\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{j_y}$$

$$\left\langle jm\middle|j_y\middle|jm'\right\rangle = \left\langle jm\middle|\frac{j_+ - j_-}{2i}\middle|jm'\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\langle jm|j_+|jm\rangle - \langle jm|j_-|jm'\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle j,m|j^2|j,m'\rangle = \langle j,m|j(j+1)|j,m'\rangle$$

$$= j(j+1)\delta_{mm'}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

***b)*** $j_x j_y - j_y j_x = \frac{1}{4i}\left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{4i}\left[\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 \\ -2\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{6} & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 \\ -2\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{6} \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{6} & 0 & -4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= i\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$ij_z = i\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } j_x j_y - j_y j_x = ij_z$$

$$ii)\, j_+ j_- = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j_- j_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$j_+ j_- - j_- j_+ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 j_z$$