

**Άσκηση 1:**

Εάν  $l_i$  είναι οι τελεστές της στροφορμής, δείξτε ότι ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης:

$$(a) [l_i, r_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} r_k, \quad (b) [l_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k$$

Χρησιμοποιήστε τις για να δείξετε ότι:

$$(c) [l_i, l_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} l_k, \quad (d) [l^2, l_i] = 0$$

Από τους ορισμούς:  $[j_i, j_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} j_k$ ,  $[j^2, j_i] = 0$ , και  $j_{\pm} = j_x \pm ij_y$

Υπολογίστε τους μεταθέτες:

$$(e) [j^2, j_{\pm}], \quad (f) [j_+, j_-]$$

και αποδείξτε ότι: (g)  $j_{\mp} j_{\pm} = j^2 - j_z(j_z \pm 1)$

**Άσκηση 2:**

Χρησιμοποιώντας τους τελεστές  $l_{\pm} = e^{\pm i\varphi} \left[ \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]$ , και ξεκινώντας από

$$Y_l^l(\theta, \varphi) = C(\sin \theta e^{i\varphi})^l \quad \text{ή} \quad Y_0^l(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad \text{υπολογίστε όλα τα } Y_m^l(\theta, \varphi) \text{ για:}$$

(a)  $l = 1$  (b)  $l = 4$ .

Αναπτύξτε σε σειρά των σφαιρικών αρμονικών: (c) 1, (d)  $\cos \theta$ , (e)  $\cos^2 \theta$ , (f)  $\cos^4 \theta$ , (g)  $\cos^2 \theta \sin^2 \theta$

**Άσκηση 3:**

Ορίζουμε τα στοιχεία πίνακα του τελεστή  $\hat{T}$ :  $T_{mm'} = \langle jm | \hat{T} | jm' \rangle$ , δίνοντας  $(2j+1)^2$  στοιχεία.

(α) Υπολογίστε τους πίνακες  $(4 \times 4)$  για  $j=3/2$ , για  $j_x, j_y, j_z, j_+, j_-, j^2$ .

(β) Πολλαπλασιάζοντας τους αντίστοιχους πίνακες, δείξτε ότι:

$$(i) j_x j_y - j_y j_x = i j_z \quad (ii) j_+ j_- - j_- j_+ = 2 j_z$$