Κβαντομηχανική Ι

4ο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

Γνωρίζουμε ότι $H = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}$

$$[H, \hat{a}]|n\rangle = (H\hat{a} - \hat{a}H)|n\rangle$$

$$= \left[\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) a - a\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]|n\rangle$$

$$= \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{a} + \frac{\hat{a}}{2} - a\hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\hat{a}}{2}\right]|n\rangle$$

$$= [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\, \hat{a}|n\rangle \quad (1)$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)|n\rangle$$

$$\left(n - \sqrt{(n+1)^2}\right)|n\rangle = -1|n\rangle$$

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1 \quad (2)$$

$$\boxed{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = -[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 1} \quad (3)$$

$$(1{,}2) \;\Rightarrow [H, \hat{a}]|n\rangle = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\, \hat{a}|n\rangle = -\,\hat{a}|n\rangle$$

$$\boxed{\Rightarrow [H, \hat{a}] = -\hat{a}}$$

$$[H, \hat{a}^\dagger]|n\rangle = \left[\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right]|n\rangle$$

$$= \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{\hat{a}}{2} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{\hat{a}}{2}\right] |n\rangle$$

$$= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\, |n\rangle$$

$$(3) \ \Rightarrow [H, \hat{a}^\dagger]|n\rangle = \hat{a}^\dagger |n\rangle$$

$$\boxed{\Rightarrow [H, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger}$$

Άσκηση 2

$$\hat{x} = x_o \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right), \qquad \mu\varepsilon \ x_o = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$\langle n|\hat{x}|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n\middle|\hat{a} + \hat{a}^\dagger\middle|m\rangle\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle n|\hat{a}|m\rangle + \langle n\middle|\hat{a}^\dagger\middle|m\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{m}\langle n|m-1\rangle + \sqrt{m+1}\langle n|m+1\rangle\right)$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{m}\,\delta_{n,m-1} + \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\right)}$$

ΟΜΩΣ, τα $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ δεν είναι παρά τα στοιχεία πίνακα nm του τελεστή $\hat{x}$. Κάθε στοιχείο του πίνακα $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ μας δείχνει την προβολή της κατάστασης ($\equiv$ του διανύσματος) n στην κατάσταση m, όταν στο σύστημα επιδρά ο τελεστής $\hat{x}$ ($\equiv$ όταν κάνουμε μια μέτρηση της θέσης). Με άλλα λόγια, τα $\langle n|\hat{x}|m\rangle$ μας δίνουν την ανάμειξη των καταστάσεων n, m, όταν στο σύστημα επιδρά ο τελεστής $\hat{x}$. Άρα, για όλα τα n,m, θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα:

$$\hat{x} = \langle n|\hat{x}|m\rangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}$$

Αυθαίρετα πήρα την περίπτωση ενός πίνακα 7x7, που αντιπροσωπεύει έναν αρμονικό ταλαντωτή με 7 καταστάσεις ($|0\rangle, |1\rangle, \ldots |6\rangle$). Βλέπουμε ότι τα στοιχεία (0,0),(1,1),…(6,6) είναι πάντα μηδέν, ενώ τα μοναδικά μη-μηδενικά στοιχεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει n=m-1 (01,12,23,…56) και n=m+1 (10,21,32,…65).

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{x}^2|m\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\middle|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2\middle|m\right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\middle|\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\middle|m\right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n|\hat{a}^2|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|m\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|m\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\sqrt{m(m-1)}\langle n|m-2\rangle + \sqrt{(m+2)(m+1)}\langle n|m+2\rangle + \sqrt{m^2}\langle n|m\rangle \\ &\qquad + \sqrt{(m+1)(m+1)}\langle n|m\rangle\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle n|\hat{x}^2|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n,m-2} + \sqrt{(m+2)(m+1)}\,\delta_{n,m+2} + (2m+1)\delta_{nm}\right)}$$

$$\hat{x}^2 = \langle n|\hat{x}^2|m\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 7 & 0 & 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 9 & 0 & \sqrt{30} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{5} & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{30} & 0 & 13 \end{vmatrix}$$

Στην περίπτωση του $\langle n|\hat{x}^2|m\rangle$ τα στοιχεία (0,0),(1,1),...(6,6) είναι μη-μηδενικά, όπως και τα στοιχεία για τα οποία ισχύει n=m-2 (02,24,46) και n=m+2 (20, 42, 64). Όλα τα υπόλοιπα είναι μηδενικά.

$$\langle n|\hat{x}^3|m\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\left|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right|m\right\rangle$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\left\langle n\left|\left(\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger^2}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right|m\right\rangle$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\left\langle n\left|\left(\hat{a}^3+\hat{a}^2\hat{a}^\dagger+\hat{a}^{\dagger^2}\hat{a}+\hat{a}^{\dagger^3}+\hat{a}^\dagger\hat{a}^2+\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger 2}\right)\right|m\right\rangle$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(\langle n|\hat{a}^3|m\rangle + \left\langle n\middle|\hat{a}^2\hat{a}^\dagger\middle|m\right\rangle + \left\langle n\middle|\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}\middle|m\right\rangle + \left\langle n\middle|\hat{a}^{\dagger 3}\middle|m\right\rangle + \left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger\hat{a}^2\middle|m\right\rangle$$
$$+ \left\langle n\middle|\hat{a}^\dagger\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\middle|m\right\rangle + \left\langle n\middle|\hat{a}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|m\right\rangle + \left\langle n\middle|\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger 2}\middle|m\right\rangle\Big)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(\sqrt{m(m-1)(m-2)}\langle n|m-3\rangle + \sqrt{m(m+1)(m+1)}\langle n|m-1\rangle$$
$$+ \sqrt{(m+1)m^2}\langle n|m+1\rangle + \sqrt{(m+3)(m+2)(m+1)}\langle n|m+3\rangle$$
$$+ \sqrt{(m-1)^2 m}\langle n|m-1\rangle + \sqrt{(m+1)^3}\langle n|m+1\rangle + \sqrt{m^3}\langle n|m-1\rangle$$
$$+ \sqrt{(m+2)^2(m+1)}\langle n|m+1\rangle\Big)$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(\sqrt{m(m-1)(m-2)}\delta_{n,m-3} + (m+1)\sqrt{m}\delta_{n,m-1} + m\sqrt{(m+1)}\delta_{n,m+1}$$
$$+ \sqrt{(m+3)(m+2)(m+1)}\delta_{n,m+3} + (m-1)\sqrt{m}\delta_{n,m-1}$$
$$+ (m+1)\sqrt{(m+1)}\delta_{n,m+1} + m\sqrt{m}\delta_{n,m-1} + (m+2)\sqrt{(m+1)}\delta_{n,m+1}\Big)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow \langle n|\hat{x}^3|m\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2}\Big(&\sqrt{m(m-1)(m-2)}\delta_{n,m-3}\\ &+ 3m\sqrt{m}\delta_{n,m-1} + 3(m+1)\sqrt{(m+1)}\delta_{n,m+1}\\ &+ \sqrt{(m+3)(m+2)(m+1)}\delta_{n,m+3}\Big)\end{aligned}}$$

$$\hat{x}^3 = \langle n|\hat{x}^3|m\rangle = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 6\sqrt{2} & 0 & 9\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{15} & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 9\sqrt{3} & 0 & 24 & 0 & 2\sqrt{30} \\ 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 24 & 0 & 15\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} & 0 & 15\sqrt{5} & 0 & 18\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{30} & 0 & 18\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix}$$

Σε αυτό τον πίνακα, στα μη-μηδενικά στοιχεία που είδαμε για $\langle n|\hat{x}|m\rangle$, προστίθενται και αυτά για n=m-3 (03, 14, 25, 36) και n=m+2 (30, 41, 52, 63).

$$\langle n|\hat{x}\hat{p}|m\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle n\big|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\,)\big|m\rangle$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\left\langle n\middle|\left(-\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger^2}-\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\middle|m\right\rangle$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\left(-\langle n|\hat{a}^2|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|m\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|m\rangle\right)$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\Big(-\sqrt{m(m-1)}\langle n|m-2\rangle + \sqrt{(m+2)(m+1)}\langle n|m+2\rangle - \sqrt{m^2}\langle n|m\rangle + \sqrt{(m+1)(m+1)}\langle n|m\rangle\Big)$$

$$\boxed{\langle n|\hat{x}\hat{p}|m\rangle = i\frac{\hbar}{2}\left(-\sqrt{m(m-1)}\delta_{n,m-2} + \sqrt{(m+2)(m+1)}\delta_{n,m+2} - \delta_{nm}\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow \langle n'|\hat{x}^4|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \Big[&\sqrt{m(m-1)(m-2)(m-3)}\;\delta_{n,m-4} \\ &+ 2(2m-1)\sqrt{m(m-1)}\delta_{n,m-2} \\ &+ 3(2m^2+2m+1)\delta_{n,m} \\ &+ 4(m+1)\sqrt{(m+1)(m+2)}\delta_{n,m+2} \\ &+ \sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\delta_{n,m+4}\Big]\end{aligned}}$$

$$\hat{x}^4 = \langle n|\hat{x}^4|m\rangle = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 4\sqrt{6} & 0 & 2\sqrt{30} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 39 & 0 & 12\sqrt{3} & 0 & 6\sqrt{10} \\ 0 & 4\sqrt{6} & 0 & 75 & 0 & 16\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{6} & 0 & 12\sqrt{3} & 0 & 123 & 0 & 10\sqrt{30} \\ 0 & 2\sqrt{30} & 0 & 16\sqrt{5} & 0 & 183 & 0 \\ 0 & 0 & 6\sqrt{10} & 0 & 10\sqrt{30} & 0 & 255 \end{vmatrix}$$

Άσκηση 3

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Η $\Phi_n(p,t)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του $\Psi_n(x,t)$:

$$\Phi_n(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi_n(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e^{-iE_n t/\hbar} \int_0^\alpha e^{-ipx/\hbar} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \int_0^\alpha e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \frac{e^{\frac{in\pi x}{\alpha}} - e^{-\frac{in\pi x}{\alpha}}}{2i} \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar a}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \frac{1}{2i} \int_0^\alpha \left[e^{i\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)x} - e^{i\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)x} \right] \, dx$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{\pi\hbar a}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \left[\frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)x}}{i\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} - \frac{e^{i\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)x}}{i\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} \right] \Bigg|_0^\alpha$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi\hbar a}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \left[\frac{e^{i\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)\alpha} - 1}{\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} - \frac{e^{i\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)a} - 1}{\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} \right]$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi\hbar a}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \left[\frac{e^{in\pi} e^{-i\frac{p}{\hbar}\alpha} - 1}{\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} - \frac{e^{-in\pi} e^{-i\frac{p}{\hbar}\alpha} - 1}{\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} \right]$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi\hbar a}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \left[\frac{(-1)^n e^{i\frac{p}{\hbar}\alpha} - 1}{\left(\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)} - \frac{(-1)^n e^{-i\frac{p}{\hbar}\alpha} - 1}{\left(-\frac{n\pi}{\alpha} - \frac{p}{\hbar}\right)}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \frac{2n\pi}{(n\pi)^2 - \left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2} \left[(-1)^n e^{-i\frac{p}{\hbar}\alpha} - 1\right]$$

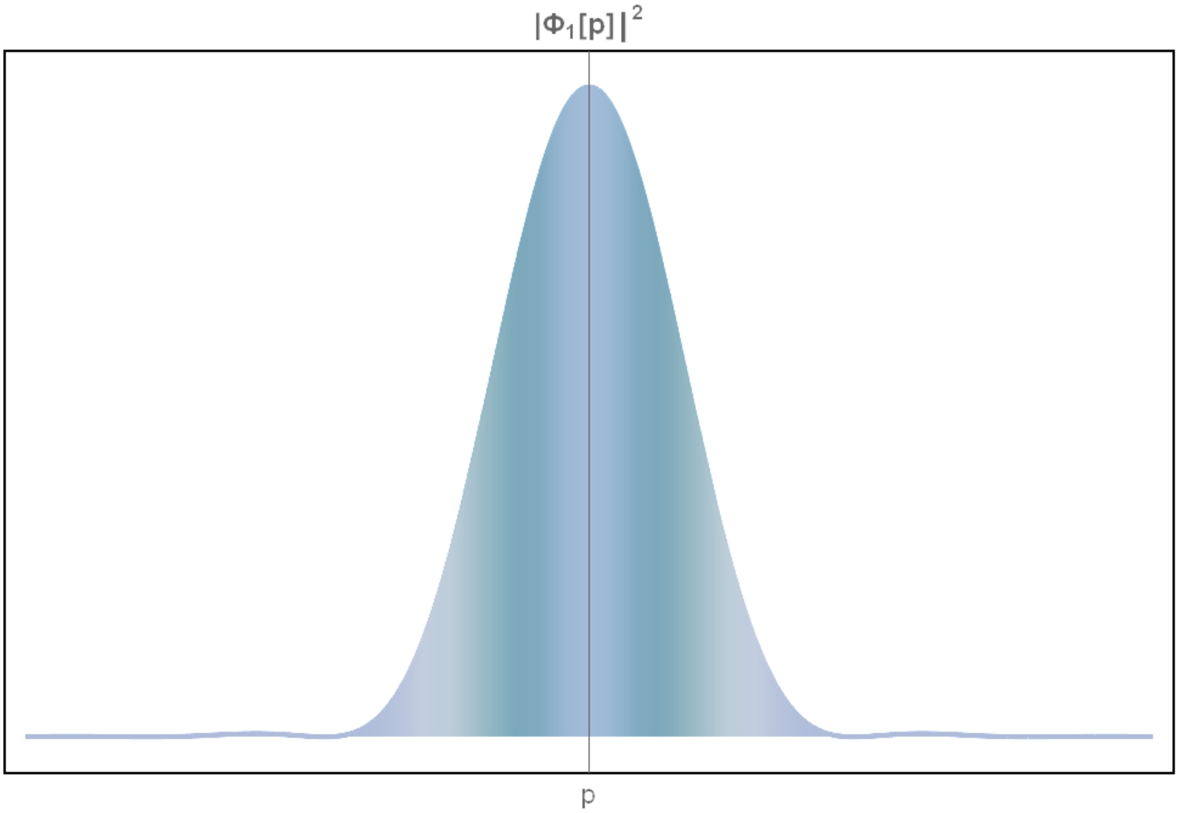
$$= -\sqrt{\frac{\pi a}{\hbar}} \frac{n e^{-iE_n t/\hbar}}{(n\pi)^2 - \left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2} \left[1 - (-1)^n e^{-i\frac{p}{\hbar}\alpha}\right]$$

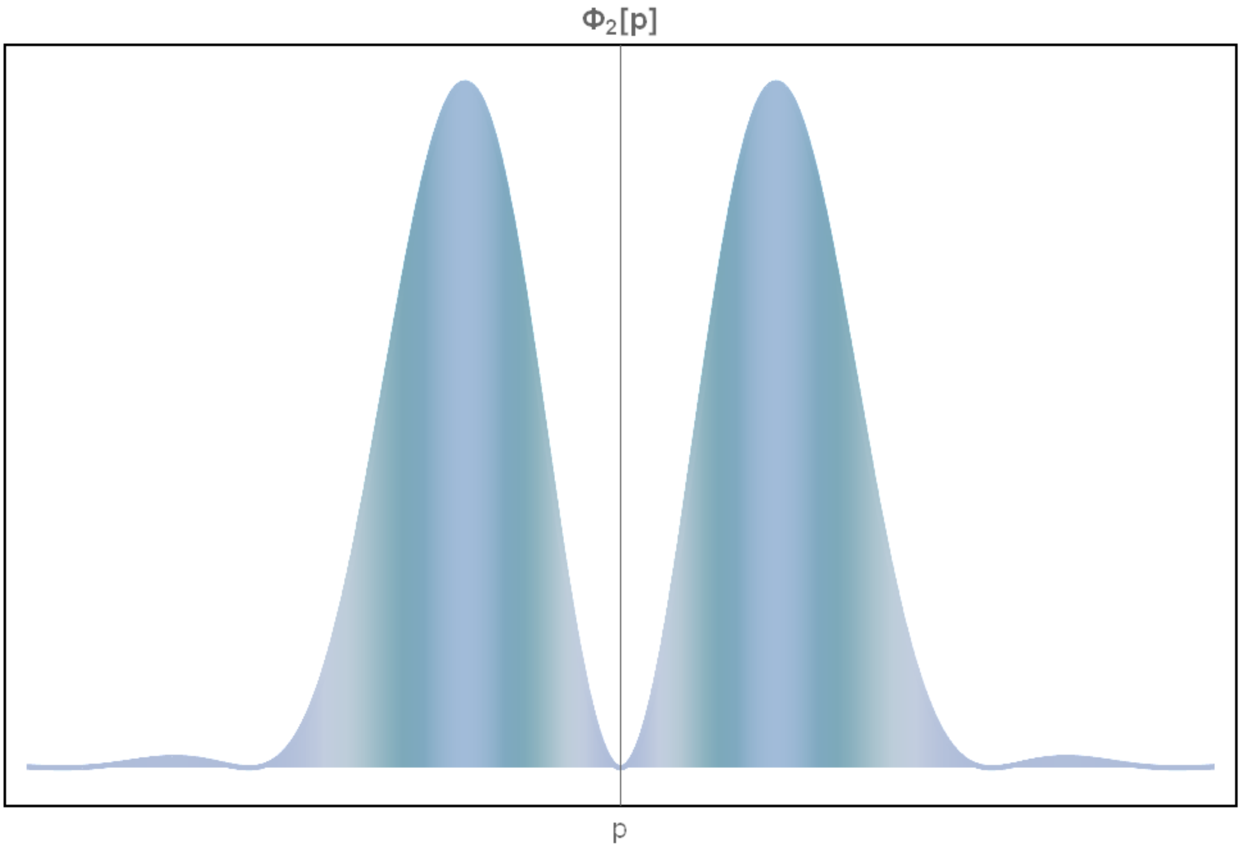
$$1 - (-1)^n e^{-i\frac{p}{\hbar}\alpha} = e^{-i\frac{p}{2\hbar}\alpha}\left[e^{i\frac{p}{2\hbar}\alpha} - (-1)^n e^{-i\frac{p}{2\hbar}\alpha}\right] = \begin{cases} 2e^{-i\frac{p}{2\hbar}\alpha}\cos(pa/2\hbar), & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o} \\ 2ie^{-i\frac{p}{2\hbar}\alpha}\sin(pa/2\hbar), & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o \end{cases}$$

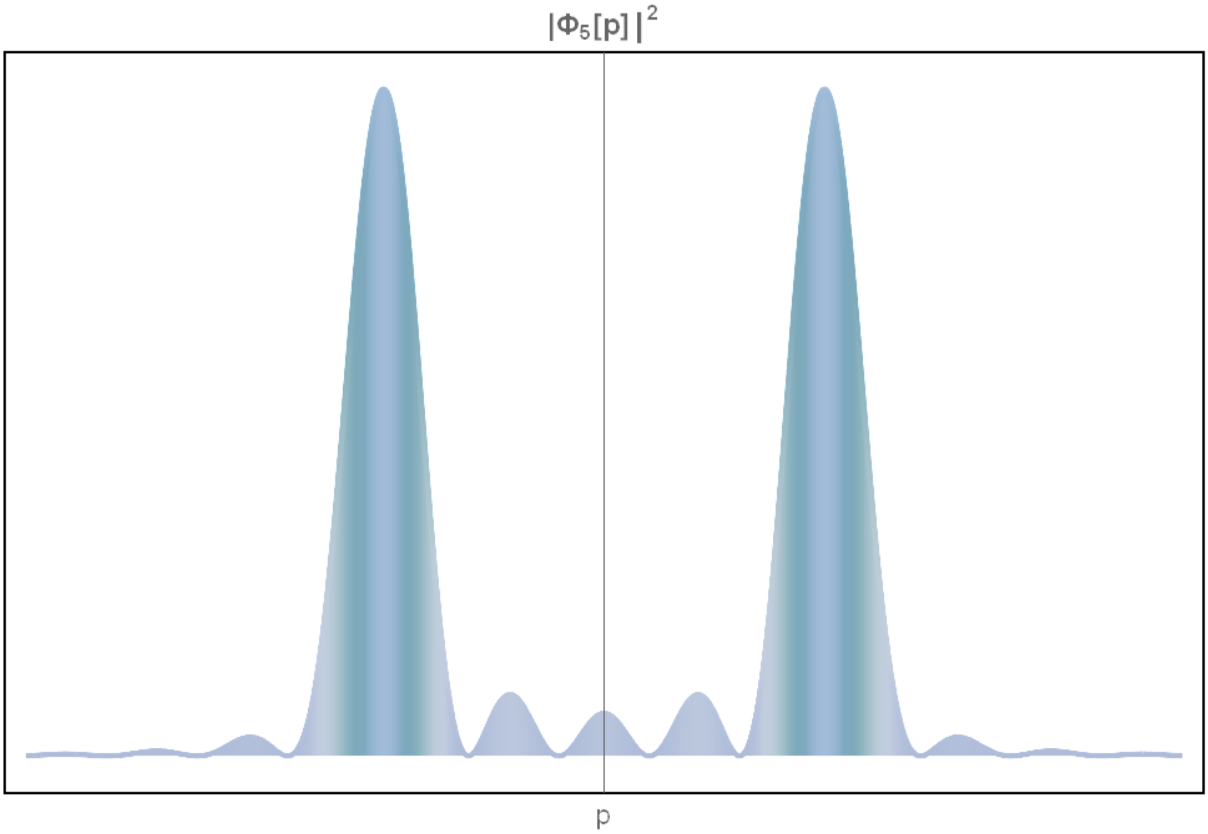
$$\Rightarrow \Phi_n(p,t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi a}{\hbar}} \frac{n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}}{(n\pi)^2 - \left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2} 2e^{-i\frac{p}{2\hbar}\alpha}\cos\left(\frac{pa}{2\hbar}\right), & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o} \\ -\sqrt{\frac{\pi a}{\hbar}} \frac{n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}}{(n\pi)^2 - \left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2} 2ie^{-i\frac{p}{2\hbar}\alpha}\sin\left(\frac{pa}{2\hbar}\right), & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o \end{cases}$$

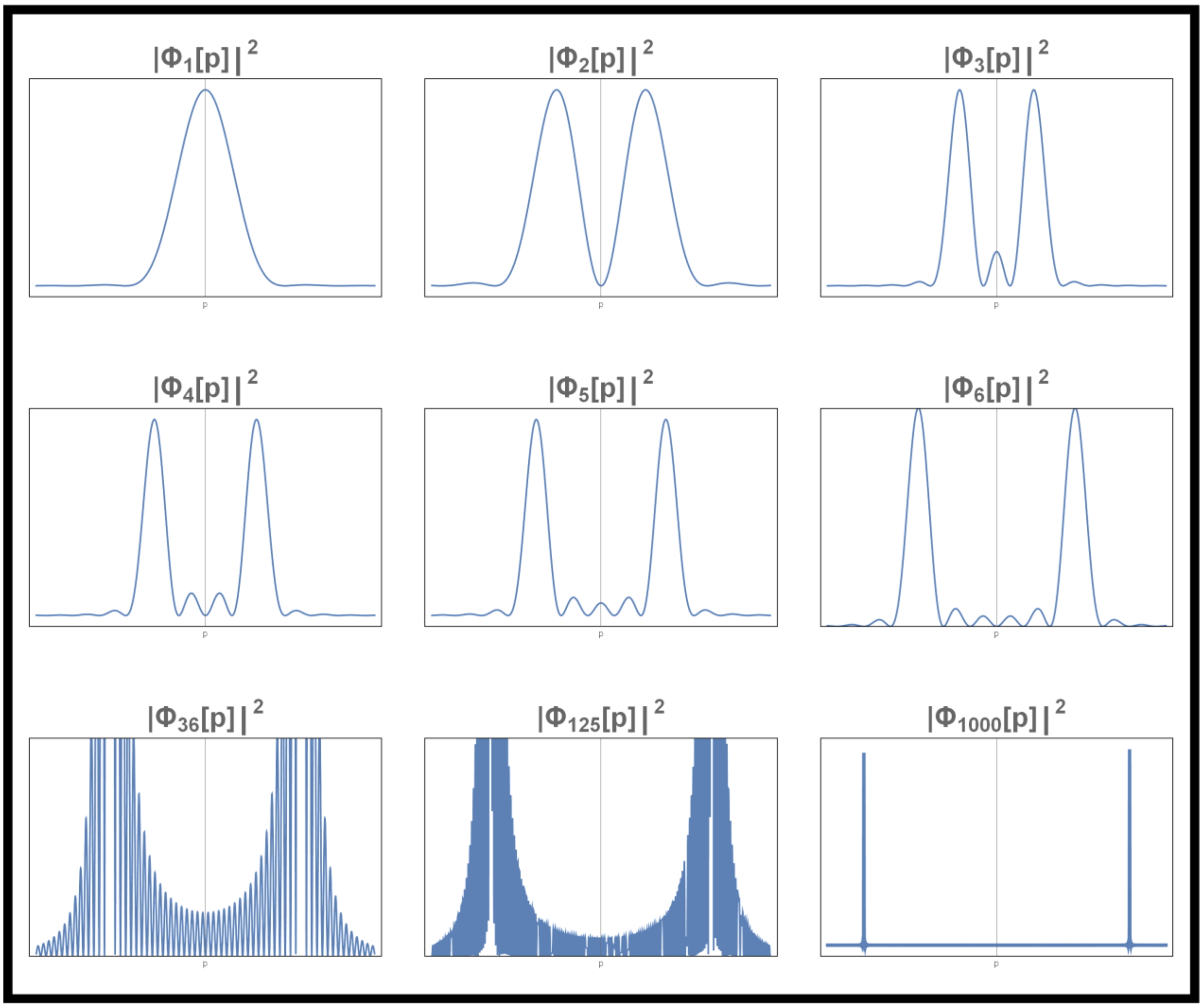
$$|\Phi_n(p,t)|^2 = \begin{cases} 4\frac{\pi a}{\hbar} \frac{n^2}{\left[(n\pi)^2 - \left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2\right]^2}\cos^2(pa/2\hbar), & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o} \\ 4\frac{\pi a}{\hbar} \frac{n^2}{\left[(n\pi)^2 - \left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2\right]^2}\sin^2(pa/2\hbar), & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o \end{cases}$$

Οι πυκνότητες πιθανότητας των καταστάσεων για n=1,2,5 φαίνονται στις επόμενες γραφικές παραστάσεις.


$|\Phi_1[p]|^2$
p


$\Phi_2[p]$
p


$|\Phi_5[p]|^2$
p


$|\Phi_1[p]|^2$
$|\Phi_2[p]|^2$
$|\Phi_3[p]|^2$
$|\Phi_4[p]|^2$
$|\Phi_5[p]|^2$
$|\Phi_6[p]|^2$
$|\Phi_{36}[p]|^2$
$|\Phi_{125}[p]|^2$
$|\Phi_{1000}[p]|^2$

Άσκηση 4

$$\hat{x}^4 = \langle n|\hat{x}^4|m\rangle = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 10 & 0 & 2\sqrt{30} & 0 & 0 \\ 0 & 39 & 0 & 14 & 0 & 6\sqrt{10} & 0 \\ 8\sqrt{6} & 0 & 75 & 0 & 18 & 0 & 2\sqrt{210} \\ 0 & 24\sqrt{3} & 0 & 123 & 0 & 22 & 0 \\ 2\sqrt{30} & 0 & 32\sqrt{5} & 0 & 183 & 0 & 26 \\ 0 & 6\sqrt{10} & 0 & 20\sqrt{30} & 0 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{210} & 0 & 24\sqrt{42} & 0 & 339 \end{vmatrix}$$

$$\langle \Phi|x^n|\Phi\rangle = (\langle 0| + \langle 1|)(x^n)(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$= \langle 0|x^n|0\rangle + \langle 1|x^n|1\rangle + \langle 0|x^n|1\rangle + \langle 1|x^n|0\rangle$$

Από την άσκηση 2, βλέπουμε ότι για n περιττό, τα μη-μηδενικά στοιχεία του $\langle n'|x^n|m\rangle$ είναι τα στοιχεία με διαφορά 1,3,5... ανάμεσα στη στήλη και τη γραμμή του πίνακα. Δηλαδή, τα στοιχεία nm=12,23,32,21,25,52.... Αντίστοιχα για n άρτιο, μη-μηδενικά είναι τα διαγώνια, και αυτά που η διαφορά μεταξύ στηλών και γραμμών είναι 2,4,6..., δηλαδή τα στοιχεία 11,22,33,13,24,26...

Σε αυτή την άσκηση, μας δίνεται αρμονικός ταλαντωτής με $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, άρα ο πίνακας $\langle n|x^n|m\rangle$ θα είναι διαστάσεων 2x2, για n,m=0 ή 1 . Έτσι, οι όροι που θα μας ενδιαφέρουν θα είναι μόνο οι διαγώνιοι, για n άρτιο, και οι μη-διαγώνιοι, για n περιττό:

$$\langle \Phi|x^n|\Phi\rangle = \langle 0|x^n|0\rangle + \langle 1|x^n|1\rangle, n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o$$
$$\langle \Phi|x^n|\Phi\rangle = \langle 0|x^n|1\rangle + \langle 1|x^n|0\rangle, n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}$$
$$|0\rangle = e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$|1\rangle = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$(\hbar = m = \omega = 1)$$

Έτσι, για n άρτιο,

$$\langle \Phi|x^n|\Phi\rangle = (\langle 0|x^n|0\rangle + \langle 1|x^n|1\rangle)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^n x^2 e^{-x^2}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+2} e^{-x^2}\,dx$$
$$= \frac{n!}{(n/2)!\,4^{n/2}}\sqrt{\pi} + \frac{(n+2)!}{[(n+2)/2]!\,4^{(n+2)/2}}\sqrt{\pi}, \qquad n = 0,2,4\ldots$$

Αντίστοιχα, για n περιττό,

$$\langle \Phi | x^n | \Phi \rangle = \langle 0 | x^n | 1 \rangle + \langle 1 | x^n | 0 \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^n x e^{-x^2}\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^{(n+1)} e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^{(n+1)} e^{-x^2}\,dx$$
$$= 2\frac{[(n+1)]!}{[(n+1)/2]!\,4^{(n+1)/2}}, \qquad n = 1,3,5\ldots$$

$$\langle \Phi | p^n | \Phi \rangle = \langle 0 | p^n | 0 \rangle + \langle 1 | p^n | 1 \rangle + \langle 0 | p^n | 1 \rangle + \langle 1 | p^n | 0 \rangle$$
$$= (-i)^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx + \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx \right]$$

$$\langle 0 | p^n | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \overbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}^{\substack{\Pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o},\ \alpha\nu\ n=2k+1\,:\,k\in Z \\ \text{Άρτιο},\ \alpha\nu\ n=2k:\,k\in Z}} dx$$
$$= \begin{cases} 0\,, & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\,, & n\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o \end{cases}$$

Η έκφραση $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ *είναι περιττή για n περιττό, γιατί*

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \kappa\, x e^{-\frac{x^2}{2}} + \lambda\, x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\Rightarrow \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sum_n \kappa_n\, x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$*, περιττή συνάρτηση*

Και αντίστοιχα,

$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sum_n \kappa_n\, x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}}$*, άρτια συνάρτηση*

Και

$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sum_n \kappa_n\, x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}}$*, άρτια συνάρτηση*

$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sum_n \kappa_n\, x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$*, περιττή συνάρτηση*

Χρησιμοποιώντας αυτά,

$$\langle 1|p^n|1\rangle = \begin{cases} 0\,, & n \text{ περιττό} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx\,, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

$$\langle 1|p^n|0\rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx\,, & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

$$\langle 0|p^n|1\rangle = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx\,, & n \text{ περιττό} \\ 0, & n \text{ άρτιο} \end{cases}$$

Άσκηση 5

$$|\psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$P_1 = |a|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1/\sqrt{2}$$
$$P_2 = |b|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1/\sqrt{2}e^{i\varphi}$$

$$|\psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}\big(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\big)$$

$$\langle\hat{p}\rangle_{t=0} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \quad (1)$$ Αρχική συνθήκη

$$\langle\hat{p}\rangle_{t=0} = \langle\psi(0)|\hat{p}|\psi(0)\rangle$$ Αναλυτική έκφραση

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\langle 0| + e^{-i\varphi}\langle 1|\right)\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(-e^{i\varphi}\langle 0|\hat{a}|1\rangle + e^{-i\varphi}\langle 1|\hat{a}^\dagger|0\rangle\right)$$
$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(-e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin(a) \quad (2)$$

(1)= (2)

Άρα $\langle\hat{p}\rangle_{t=0} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin(\varphi) \Rightarrow \sin(\varphi) = 1$

$$\boxed{\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{\frac{i\pi}{2}}|1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t/2} \ |0\rangle + i e^{-3i\omega t/2}|1\rangle) \quad \omega = \frac{E_o}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \ \langle\hat{p}(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(e^{\frac{i\omega t}{2}} \langle 0| \ - i e^{\frac{3i\omega t}{2}}\langle 1| \right)\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\left(e^{-\frac{i\omega t}{2}} \ |0\rangle + i e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle\right)$$

$$= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(-ie^{i\omega t}\langle 0|\hat{a}|1\rangle - ie^{-i\omega t}\langle 1|\hat{a}^\dagger|0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \ \langle\hat{p}(t)\rangle = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\cos(\omega t)}$$

$$(= \sqrt{m\omega\hbar/1}\, sin\left(\omega t \ + \frac{\pi}{2}\right)$$