Πανεπιστήμιο Κρήτης,
Τμήμα Φυσικής

Κβαντομηχανική Ι

3ο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

Οι λύσεις του αρμονικού ταλαντωτή, με $V = m\,\omega^2 x^2$ είναι της μορφής

$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}, n = 0,1,2 \ldots$ *(1)*

Με H_n τα πολυώνυμα Hermite n-οστού βαθμού. Οι λύσεις αυτών των πολυωνύμων είναι εναλλάξ άρτιες και περιττές.

Για τον «μισό» αρμονικό ταλαντωτή, έχουμε:

$$V(x) = \begin{cases} m\,\omega^2 x^2, & x > 0 \\ \infty, & x < 0 \end{cases}$$

Επειδή, λοιπόν, το δυναμικό στο x=0 απειρίζεται, θα πρέπει οι κυματοσυναρτήσεις εκεί να μηδενίζονται. Αυτό μας δίνει τη συνθήκη

$$\psi(0) = 0$$

Όμως, οι κυματοσυναρτήσεις που εκπληρώνουν αυτή τη συνθήκη και είναι της μορφής (1), είναι εκείνες για n περιττά. Έτσι, η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι πλέον η

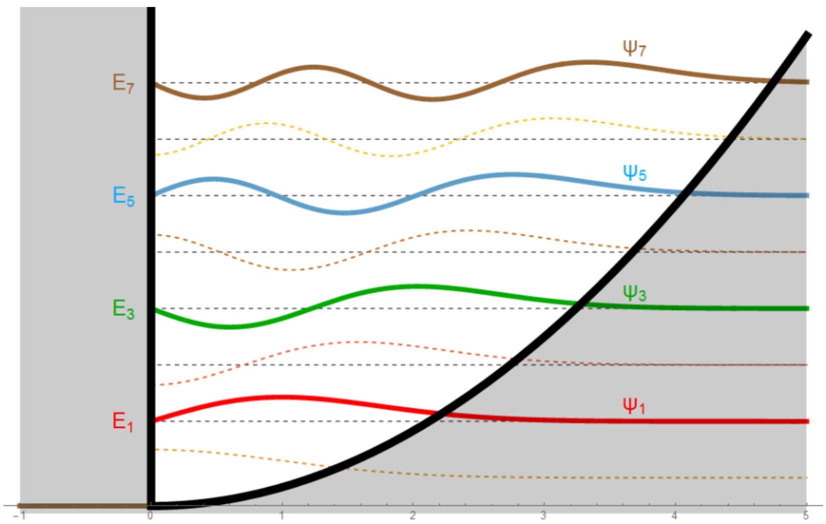
$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} H_1(x) e^{-x^2/2} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{2}\, x^2 e^{-x^2/2}$$

Και το πλήρες σύνολο των ιδιοκαταστάσεων και ιδιοενεργειών του «μισού» αρμονικού ταλαντωτή θα είναι:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}, n = 1,3,5, \ldots$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, n = 1,3,5, \ldots$$

Διδάσκων:Πέτρος Ρακιτζής
Βοηθός: Αλέξανδρος Σπηλιώτης



Εικόνα 1 Ιδιοκαταστάσεις (συνεχείς εγχρωμες γραμμές) και ιδιοενέργειες (διακεκομμένες μαύρες γραμμές) μισού αρμονικού ταλαντωτή.Εμφανίζονται και οι άρτιες κυματοσυναρτήσεις του αρμονικού ταλαντωτή (διακεκομμένες έγχρωμες γραμμές), οι οποίες όμως δεν αποτελούν λύσεις του μισού αρμονικού ταλαντωτή, καθώς δε μηδενίζονται στο x=0.

Άσκηση 2

Γνωρίζουμε ότι

$[\hat{x},\hat{p}] = i\,\hbar$

$a)[\hat{x}^2,\hat{p}]\psi \;= \hat{x}[\hat{x},\hat{p}]\psi + [\hat{x},\hat{p}]\hat{x}\psi$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{x}\,\overbrace{[\hat{x},\hat{p}]}^{i\,\hbar}\,\psi + \overbrace{[\hat{x},\hat{p}]}^{i\,\hbar}\,\hat{x}\psi \\
&= \hat{x}i\hbar\psi + i\hbar\hat{x}\psi \\
&\Rightarrow [\hat{x}^2,\hat{p}]\psi = 2i\,\hat{x}\,\hbar\psi \\
&\Rightarrow [\hat{x}^2,\hat{p}] = 2i\,\hbar\,\hat{x}
\end{aligned}
$$

$b)[\hat{x},\hat{x}\hat{p}]\psi = \hat{x}[\hat{x},\hat{p}]\psi + [\hat{x},\hat{x}]\hat{p}\psi$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{x}\,\overbrace{[\hat{x},\hat{p}]}^{i\,\hbar}\,\psi + \overbrace{[\hat{x},\hat{x}]}^{0}\,\hat{p}\psi \\
&= \hat{x}i\hbar\psi \\
&\Rightarrow [\hat{x},\hat{x}\hat{p}]\psi = i\,\hbar\,\hat{x}\,\psi \\
&\Rightarrow [\hat{x}^2,\hat{p}] = i\,\hbar\,\hat{x}
\end{aligned}
$$

$c)[\hat{x}^2,\hat{p}^2]\psi = \hat{p}[\hat{x}^2,\hat{p}]\psi + [\hat{x}^2,\hat{p}]\hat{p}\psi$

$$
\begin{aligned}
&= \hat{p}\,\overbrace{[\hat{x}^2,\hat{p}]}^{2i\,\hbar\hat{x}}\,\psi + \overbrace{[\hat{x}^2,\hat{p}]}^{2i\,\hbar\hat{x}}\,\hat{p}\psi \\
&= 2i\,\hbar\,\hat{p}\hat{x}\psi + 2i\,\hbar\,\hat{x}\hat{p}\psi \\
&= 2i\,\hbar\left[-i\hbar\frac{d(x\psi)}{dx} - \hat{x}\,i\hbar\frac{d\psi}{dx}\right]
\end{aligned}
$$

$$= 2\hbar^2 \left[\frac{d(x\psi)}{dx} + \hat{x}\ \frac{d\psi}{dx}\right]$$

$$= 2\hbar^2 \left[x\frac{d\psi}{dx} + \psi + x\ \frac{d\psi}{dx}\right]$$

$$= \ 2\hbar^2 \left(2x\ \frac{d\psi}{dx} + \psi\right)$$

$$= \ 2\hbar^2 \left(2\hat{x}\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi$$

$$\Rightarrow [\hat{x}^2, \hat{p}^2]\psi = 2\hbar^2 \left(2\hat{x}\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi$$

$$\Rightarrow [\hat{x}^2, \hat{p}^2] = 2\hbar^2 \left(2\hat{x}\frac{d}{dx} + \ 1\right)$$

$$d)[\hat{x}^2\hat{p}, \hat{p}^2]\psi = [\hat{x}^2, \hat{p}^2\ ]\hat{p}\psi + \hat{x}[\hat{x}\hat{p}, \hat{p}^2]\psi$$

$$= \ \overbrace{[\hat{x}^2, \hat{p}^2\ ]}^{\hbar^2\left(3\hat{x}\frac{d}{dx}+1\right)}\ \psi + \hat{x}^2\ \overbrace{[\hat{p}, \hat{p}^2]}^{0}\,\psi + \hat{x}[\hat{x}\hat{p}, \hat{p}^2]\psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + 0 + \hat{x}^2[\hat{p}, \hat{p}^2]\psi + \hat{x}[x, \hat{p}^2]\hat{p}\ \psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + \hat{x}^2\ \overbrace{[\hat{p}, \hat{p}^2]}^{0}\,\psi + \hat{p}\hat{x}[x, \hat{p}]\hat{p}\ \psi + \hat{x}[x, \hat{p}]\hat{p}^2\ \psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + 0 + \hat{p}\hat{x}\ \overbrace{[\hat{x}, \hat{p}]}^{i\,\hbar}\ \hat{p}\ \psi + \hat{x}\ \overbrace{[\hat{x}, \hat{p}]}^{i\,\hbar}\ \hat{p}^2\ \psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + i\ \hbar\hat{p}\hat{x}\hat{p}\ \psi + i\ \hbar\hat{x}\ \hat{p}^2\ \psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + i\ \hbar\ \overbrace{\{\hat{x}, \hat{p}\}}^{i\,\hbar+2px}\ \hat{p}\psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + \left[i\ \hbar(i\ \hbar + 2px)(-i\ \ \hbar)\frac{d}{dx}\right]\psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + \left[-i^3\ \hbar^3\frac{d}{dx} - i^2\hbar^2\ 2px\frac{d}{dx}\right]\psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + \left[i\ \hbar^3\frac{d}{dx} + \hbar^2\ 2(-i\ \ \hbar)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)\right]\psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\tfrac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + \left[i\ \hbar^3\tfrac{d}{dx} - i\ \hbar^3\ 2\ \tfrac{d}{dx}\left(x\tfrac{d}{dx}\right)\right]\psi$$

Για το δεύτερο σκέλος της αγκύλης,

$$\left\{\tfrac{d}{dx}\left(x\tfrac{d}{dx}\right)\psi = (x\psi')' = \psi' + x\psi'' \Rightarrow \tfrac{d}{dx}\left(x\tfrac{d}{dx}\right) = \tfrac{d}{dx} + x\tfrac{d^2}{dx^2}\right\}$$

$$\Rightarrow [\hat{x}^2\hat{p}, \hat{p}^2]\psi = \hbar^2 \left(2x\tfrac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + i\ \hbar^3\left[\tfrac{d}{dx} - \ 2\tfrac{d}{dx} + x\tfrac{d^2}{dx^2}\right]\psi$$

$$= \hbar^2 \left(2x\tfrac{d}{dx} + \ 1\right)\psi + i\ \hbar^3\left[-\tfrac{d}{dx} + x\tfrac{d^2}{dx^2}\right]\psi$$

$$= \left[\hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + 1\right) + i\,\hbar^3 \left(-\frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2}\right)\right]\psi$$

$$\Rightarrow [\hat{x}^2\hat{p}, \hat{p}^2]\psi = \hbar^2 \left(2x\frac{d}{dx} + 1 + i\,\hbar\, x\frac{d^2}{dx^2} - i\,\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi$$

$$\Rightarrow [\hat{x}^2\hat{p}, \hat{p}^2] = \hbar^2 \left(i\,\hbar\, x\frac{d^2}{dx^2} + (2x - i\,\hbar)\frac{d}{dx} + 1\right)$$

Άσκηση 3

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{A}\right] + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle$$

$a)$ $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{H}, \hat{x}\right]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{x}}{\partial t}\rangle$

Ο τελεστής θέσης δεν έχει εξάρτηση από το χρόνο, άρα

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle x\rangle}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{H}, \hat{x}\right]\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{x}, \hat{H}\right]\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}i\hbar\,\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial p}\rangle \qquad \left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \left[\hat{x}, \hat{H}\right] = i\hbar\frac{\partial\hat{H}}{\partial p}\ \beta\lambda. \mathrm{T}\rho\alpha\chi\alpha\nu\acute{\alpha}\varsigma, K\beta\alpha\nu\tau o\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ II, \sigma\varepsilon\lambda.\right. \\
&= -\frac{i}{\hbar}i\hbar\,\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial p}\rangle \\
&= \langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial p}\rangle \\
&= \frac{1}{2m}\langle\frac{\partial(\hat{p}^2)}{\partial p}\rangle \qquad \left(+\langle\frac{\partial V(x)}{\partial p}\rangle, \pi o\upsilon\ \acute{o}\mu\omega\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ 0\ \right) \\
&= \langle\frac{\hat{p}}{m}\rangle \\
&= \langle\hat{v}\rangle
\end{aligned}$$

Δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής της θέσης ισούται με τη μέση τιμή του τελεστή της ταχύτητας.

$b)$ *Όμοια, και αφού ο τελεστής ορμής δεν έχει εξάρτηση από το χρόνο,*

$$\begin{aligned}
\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{H}, \hat{p}\right]\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{p}, \hat{H}\right]\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}i\hbar\,\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\rangle \qquad \left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \left[\hat{p}, \hat{H}\right] = i\hbar\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{x}}\ \beta\lambda. \mathrm{T}\rho\alpha\chi\alpha\nu\acute{\alpha}\varsigma, K\beta\alpha\nu\tau o\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\acute{\eta}\ II, \sigma\varepsilon\lambda.\right. \\
&= -\frac{i}{\hbar}i\hbar\,\langle\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \rangle$$
$$= \frac{1}{\cancel{2m}} \langle \cancel{\frac{\partial (\hat{p}^2)}{\partial x}} \rangle + \langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \rangle$$
$$= \langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \rangle$$
$$= -\langle F(x) \rangle$$

Άσκηση 4

$$a)\ \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}$$
$$[\hat{A},\hat{C}]\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$
$$\Rightarrow \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} \cancel{- \hat{A}\hat{C}\hat{B}} \cancel{+ \hat{A}\hat{C}\hat{B}} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$
$$\Rightarrow \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}$$

$$b)[\hat{x}^n, \hat{p}\,]\psi = \hat{x}^n\, \hat{p}\, \psi - \hat{p}\, \hat{x}^n\, \psi$$
$$= \hat{x}^n\, (-i\,\hbar)\, \frac{d\psi}{dx} - (-i\,\hbar)\, \frac{d\,(x^n \psi)}{dx}$$
$$= \ (-i\,\hbar) x^n\, \frac{d\psi}{dx} + i\,\hbar\, \left(n\, x^{n-1}\psi + x^n \frac{d\psi}{dx} \right)$$
$$= -\cancel{i\,\hbar\, x^n \frac{d\psi}{dx}} + i\,\hbar\, n\, x^{n-1}\psi\ \cancel{+ i\,\hbar\, x^n \frac{d\psi}{dx}}$$
$$\Rightarrow [\hat{x}^n, \hat{p}\,] = i\,\hbar\, n\, x^{n-1}$$

$$c)[f(x), \hat{p}\,]\psi = f(x)\hat{p}\,\psi - \hat{p}\, f(x)\psi$$
$$= f(x)(-i\,\hbar)\, \frac{d\psi}{dx} - (-i\,\hbar)\, \frac{d\, f(x)\psi}{dx}$$
$$= f(x)(-i\,\hbar)\, \frac{d\psi}{dx} - (-i\,\hbar)\, \left(f^{'}(x)\psi + f(x) \frac{d\psi}{dx} \right)$$
$$= \ -i\,\hbar\, \cancel{f(x) \frac{d\psi}{dx}} + i\,\hbar f^{'}(x)\,\psi\ + i\,\hbar\, \cancel{f(x) \frac{d\psi}{dx}}$$
$$\Rightarrow [f(x), \hat{p}\,] = i\,\hbar\, \frac{df}{dx}$$

Άσκηση 2.15 (Griffiths)

Στη θεμελιώδη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή, ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο έξω από την κλασσικά επιτρεπόμενη περιοχή;

$$\psi_o = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi}{2}}$$

$$P_o = 2\sqrt{\frac{m\ \omega}{\pi\hbar}} \int_{x_o}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\, dx$$

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\ \omega}{\hbar}}\ x$$

Άρα $\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{m\ \omega}{\hbar}}$

$$\Rightarrow P_o = 2\sqrt{\frac{m\ \omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\ \omega}} \int_{x_o}^{\infty}\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right)^2 d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\xi_o}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

Για να βρούμε το x_o , πρέπει να δούμε μέχρι που εκτείνεται η «κλασικά επιτρεπόμενη» περιοχή. Κλασικά, η ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$E_o = \frac{1}{2} m\ \omega^2\ x_o^2$$

Όμως $E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow x_o = \sqrt{\frac{\hbar}{m\ \omega}} = \frac{xo}{\xi_o} \Rightarrow \xi_o = 1$

Οπότε η πιθανότητα γίνεται

$$P_o = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{1}^{\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$$

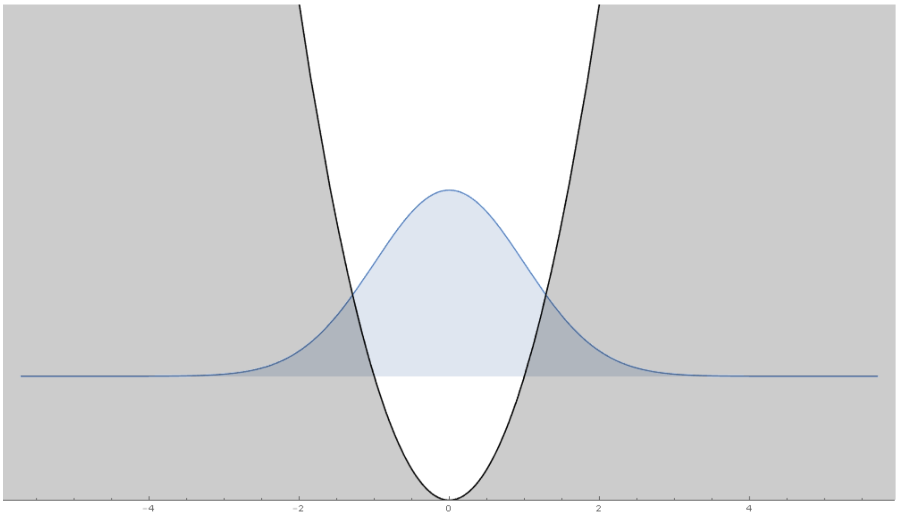
Το ολοκλήρωμα είναι η error function, erf(ξ) η οποία δίνει

$Erf(1) = 0.842$

$Erf(\infty) = 1$

Άρα $P_o(x > x_o) = Erf(\infty) - Erf(1) = 0.158$

$$P_o = 0.316 = 31.6\%$$



Άσκηση 2.13 Griffiths

Ένα σωματίδιο μέσα στον αρμονικό ταλαντωτή βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση

$\Psi(\mathrm{x}, 0) = \mathrm{A}[3\psi_o(\mathrm{x}) + 4\psi_1(\mathrm{x})]$

a) Κανονικοποιήστε

b) Κατασκευάστε τα $\Psi(x,t), |\Psi(x,t)|^2$

c) Βρείτε τα <x> και <p>. Μην ενθουσιαστείτε αν βρείτε ότι ταλαντώνεται στην κλασικά αναμενόμενη συχνότητα: τι θα συνέβαινε αν αντί για ψ_1υπήρχε η ψ_2; Ισχύει το θεώρημα Ehrenfest?

d) Αν μετρούσαμε την ενέργεια του σωματιδίου, τι τιμές θα παίρναμε, και με τι πιθανότητες;

α) Κανονικοποίηση:

$$\int |\Psi(x,0)|^2 dx = 1$$

$$1 = |A|^2 \int (\cancel{9|\psi_o|^2} + \cancel{12\psi_o^*\psi_1} + 12\psi_1^*\psi_o + 16|\psi_1|^2 dx$$

$$\Rightarrow 1 = |A|^2 \int (9|\psi_o|^2 + 16|\psi_1|^2)dx = |A|^2(9+16) = 25|A|^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

β) $\Psi(x,t) = \frac{1}{5}\left[3\,\psi_o(x)e^{-i\frac{E_o t}{\hbar}} + 4\,\psi_1(x)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\right]$

$$= \frac{1}{5}e^{-i\omega t/2}\left[3\,\psi_o(x) + 4\,\psi_1(x)e^{-3i\omega t/2}\right] \qquad \left[\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = E_n\right]$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \left(\frac{1}{5}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left[3\,\psi_o(x) + 4\,\psi_1(x)e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\right]\right)^* \left(\frac{1}{5}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left[3\,\psi_o(x) + 4\,\psi_1(x)e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{5}e^{\frac{i\omega t}{2}}\left[3\,\psi_o(x) + 4\,\psi_1(x)e^{\frac{3i\omega t}{2}}\right]\right)\left(\frac{1}{5}e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left[3\,\psi_o(x) + 4\,\psi_1(x)e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{25}[9\psi_o^2 + 16\psi_1^2 + 24\psi_o\psi_1 Cos(\omega t)]$$

c) $\langle x\rangle = \frac{1}{25}[\int \cancel{x\psi_o^2\,dx} + \int \cancel{x\psi_1^2 dx} + 24\,Cos(\omega t)\int x\psi_o\psi_1 dx]$

Γιατί ψ_o^2 και ψ_1^2 αρτιες και x περιττή.

$$\int x\psi_o\psi_1 dx = \sqrt{\frac{m\,\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2m\,\omega}{\hbar}}\int xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}xe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m\,\omega}{\pi\hbar}\right)\int x^2e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{m\,\omega}{\pi\hbar}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}}\right)^3 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\,\omega}}$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle = \frac{24}{25}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\,\omega}}Cos(\omega t)]$$

Και $\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt}$

$$= -\frac{24}{25}m\omega\sqrt{\frac{\hbar}{2m\,\omega}}Sin(\omega t)$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle p\rangle = -\frac{24}{25}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,Sin(\omega t)}$$

Από το αποτέλεσμα της μέσης θέσης αλλά και της μέσης ορμής ($\langle p\rangle = m\langle u\rangle$) , είναι εμφανές ότι το αποτέλεσμα προσομοιάζει μια κλασική αρμονική ταλάντωση, όπου το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $\frac{24}{25}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\,\omega}}$, η σταθερά ελατηρίου $D = m\omega^2$ και η συχνότητα της ταλάντωσης $\omega = \frac{E_1 - E_o}{\hbar}$.

Πού οφείλεται όμως αυτή η ταλάντωση; Όχι στο γεγονός ότι το δυναμικό είναι «δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή». Αυτό αποδεικνύεται από το ότι, αν αντί για ψ_1είχαμε ψ_2, $\omega' = \frac{E_2 - E_o}{\hbar} = \frac{2\hbar\omega}{\hbar} = 2\omega$. Η συχνότητα δηλαδή θα διπλασιαζόταν, αν η ταλάντωση ήταν ανάμεσα σε δυο καταστάσεις με μεγαλύτερη διαφορά ενέργειας μεταξύ τους.

Η μέση θέση και η μέση ορμή ταλαντώνονται επειδή το σωματίδιο βρίσκεται σε μια υπέρθεση δυο καταστάσεων. Αυτή η υπέρθεση, όπως έχουμε δει και σε παλαιότερες ασκήσεις, δίνει μια χρονική εξάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας, της μορφής Cos(ωt), όπου ω η συχνότητα μετάβασης.

Ισχύει το θεώρημα Ehrenfest?

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\frac{24}{25}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,\frac{d[Sin(\omega t)]}{dt} = -\frac{24}{25}\omega\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}Cos(\omega t)$$

$$-\langle\frac{dV}{dx}\rangle = -m\omega^2\langle x\rangle = -m\omega^2\langle x\rangle = -\frac{24}{25}\omega\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\;Cos(\omega t)]$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\langle p\rangle}{dt} = -\langle\frac{dV}{dx}\rangle} = -\langle F(x)\rangle$$

Δηλαδή, όπως είδαμε και παραπάνω, οι μέσες τιμές υπακούουν στους κλασικούς νόμους. *Αυτό είναι το θεώρημα Ehrenfest*

δ) Θα παίρναμε τις τιμές $E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega$ *ή* $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ *, με πιθανότητες*

$$|c_o|^2 = |A|^2 c_o^2 = \frac{9}{25}$$

$$|c_1|^2 = |A|^2 c_1^2 = \frac{16}{25}$$