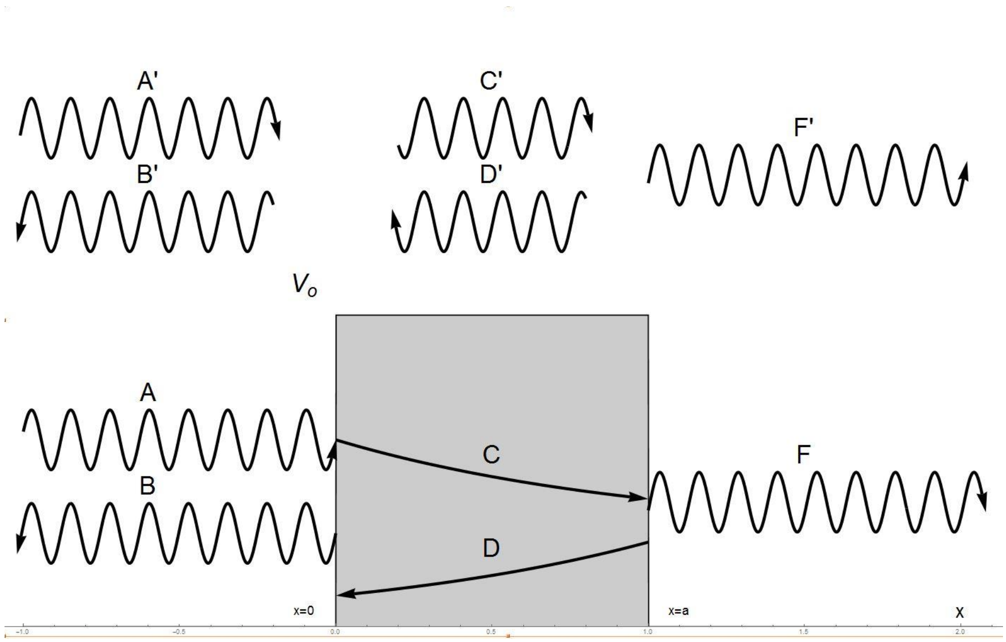
Πανεπιστήμιο Κρήτης,
Τμήμα Φυσικής

Κβαντομηχανική Ι

2ο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1



Ξεκινάμε με την περίπτωση E<Vo.

Περιοχή Ι:

x<0, V=0, E<Vo

⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = E\,\psi_I$

⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = E\psi_I$

⇨ $\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}E\psi_I$

⇨ $\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = -k^2\,\psi_I \qquad (\mathrm{E} > 0)$

⇨ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{h^2}$

⇨ $\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ (1)

Διδάσκων:Πέτρος Ρακιτζής
Βοηθός: Αλέξανδρος Σπηλιώτης

Περιοχή ΙΙΙ:

x>a, V=0, E<Vo

- $\Rightarrow -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{III}}{dx^2} = E\,\psi_{III}$
- $\Rightarrow -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{III}}{dx^2} = E\psi_{III}$
- $\Rightarrow \frac{d^2\,\psi_{III}}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}E\psi_{III}$
- $\Rightarrow \frac{d^2\,\psi_{I}}{dx^2} = -k^2\,\psi_{III} \qquad (\mathrm{E} > 0)$
- $\Rightarrow k = \frac{\sqrt{2mE}}{h^2}$
- $\Rightarrow \psi_{III}(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$

  Όμως, δεν υπάρχει «κύμα» το οποίο προχωρά προς τα αριστερά στην περιοχή ΙΙΙ. Αν το σωματίδιο, το οποίο στέλνουμε από τα αριστερά στο πείραμά μας, περάσει το φράγμα, προχωρά ελεύθερο προς τα δεξιά. Άρα
- $\Rightarrow G = 0$
- $\Rightarrow \psi_I(x) = Fe^{ikx}$ (2)

Περιοχή ΙΙ:

0<x<α , V=V_o, 0< E<Vo

- $\Rightarrow -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} + Vo\,\psi_{II} = E\,\psi_{II}$
- $\Rightarrow -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = (E - Vo)\psi_{II}$
- $\Rightarrow \frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}(E - Vo)\psi_{II}$
- $\Rightarrow \frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = l^2\,\psi_{II} \qquad (\mathrm{E} - \mathrm{Vo} < 0)$
- $\Rightarrow l = \frac{\sqrt{2m(Vo-E)}}{h^2}$
- $\Rightarrow \psi_{II}(x) = Ce^{lx} + De^{-lx}$ (3)

Εφαρμόζουμε συνοριακές συνθήκες:

x=0:

1. $\psi_I(x) = \psi_{II}(x)$
   - $\Rightarrow Ae^{i\,k\,0} + Be^{-i\,k\,0} = Ce^{l\,0} + De^{-l\,0}$
   - $\Rightarrow A + B = C + D$ (4)
2. $\psi'_I(x) = \psi'_{II}(x)$
   - $\Rightarrow i\,k\,Ae^{i\,k\,0} - ikBe^{-i\,k\,0} = Cle^{l\,0} - Dle^{-l\,0} \quad \Rightarrow$
   - $\Rightarrow ik\,A - ik = Cl - Dl$ (5)

x=a:

1. $\psi_{III}(x) = \psi_{II}(x)$

   ⇨ $Fe^{i\,k\,a} = Ce^{l\,a} + De^{-l\,a}$ (6)

2. $\psi'_{III}(x) = \psi'_{II}(x)$

   ⇨ $ik\,Fe^{i\,k\,a} = l\,(Ce^{l\,a} - De^{-l\,a})$ (7)

Λύνω την (4) ως προς B:

⇨ $B = C + D - A$

Και αντικαθιστώ στην (5)

⇨ $ik\,(A - C - D + A) = (C - D)l$

⇨ $2A = \left(\frac{l}{i\,k} + 1\right)C + \left(1 - \frac{l}{i\,k}\right)D$

⇨ 2A=$\left(1 - \frac{il}{k}\right)C + \left(1 + \frac{i\,l}{k}\right)D$ (8)

Όμοια, λύνω την (6) ως προς $Ce^{l\,a}$ και έπειτα ως προς $De^{-l\,a}$.

Προκύπτουν δυο εξισώσεις, τις οποίες αντικαθιστώ στην (7), και παίρνω,

⇨ $2Ce^{l\,a} = \left(1 + \frac{ik}{l}\right)Fe^{i\,k\,a}$ (9)

⇨ $2De^{-l\,a} = \left(1 - \frac{ik}{l}\right)Fe^{i\,k\,a}$ (10)

Έτσι, έχω ξεχωρίσει τα F και τα A, τα οποία χρειάζομαι για να βρω τη διαπερατότητα

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

Πλέον μπορώ να αντικαταστήσω τις σχέσεις των C και D στην 8:

2A$e^{-i\,k\,a}$=$\left(1 - \frac{i\,l}{k}\right)\left(1 + \frac{i\,k}{l}\right)\frac{Fe^{i\,k\,a}}{2\,e^{2la}} + \left(1 + \frac{i\,l}{k}\right)\left(1 - \frac{ik}{l}\right)\frac{Fe^{i\,k\,a}}{2\,\,e^{-2la}}$

⇨ 2A=$\frac{Fe^{i\,k\,a}}{2e^{-i\,k\,a}}\left[\left(1 - \frac{i\,l}{k}\right)\left(1 + \frac{i\,k}{l}\right)e^{-2la} + \left(1 + \frac{i\,l}{k}\right)\left(1 - \frac{ik}{l}\right)e^{2la}\right]$

⇨ 2A=$\frac{Fe^{2i\,k\,a}}{2}\left\{\left[2 + i\left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k}\right)\right]e^{-2la} + \left[2 - i\left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k}\right)\right]e^{2la}\right\}$

⇨ 2A=$\frac{Fe^{2i\,k\,a}}{2}\left[2\left(e^{-2la} + e^{2la}\right) + i\,\frac{l^2-k^2}{kl}\left(e^{2la} - e^{-2la}\right)\right]$

Όμως $\left(e^{2la} - e^{-2la}\right) = 2Sinh(2la)$, $\left(e^{-2la} + e^{2la}\right) = 2Cosh(2la)$ (11)

⇨ 2A=$\frac{Fe^{2i\,k\,a}}{2}\left[4Cosh(2la) + 2i\,\frac{l^2-k^2}{kl}Sinh(2la)\right]$

⇨ A=$Fe^{2i\,k\,a}\left[Cosh(2la) + i\,\frac{l^2-k^2}{2kl}Sinh(2la)\right]$

Και $\frac{|A|^2}{|F|^2} = \left|e^{2i\,k\,a}\right|^2 \left[Cosh^2(la) + \frac{1}{2}\frac{l^2-k^2}{kl}Sinh^2(la)\right]$

$$Cosh^2(la) + Sinh^2(la) = 1$$

$$\frac{|A|^2}{|F|^2} = 1 + \left[1 + \left(\frac{l^2-k^2}{kl}\right)^2\right]Sinh^2(la)$$

$$\left(\frac{l^2-k^2}{kl}\right)^2 = \frac{\left[\frac{2m}{h^2}(Vo-2E)\right]^2}{4\left(\frac{2m}{h^2}\right)^2(Vo-E)E} = \frac{(Vo-2E)^2}{4(Vo-E)E}$$

$1+\left(\frac{l^2-k^2}{kl}\right)^2 = \frac{Vo^2-4E\,Vo+4E^2+4E\,Vo-4E^2}{4(Vo-E)E} = \frac{Vo^2}{4(Vo-E)E}$

Τελικά,

$\frac{|F|^2}{|A|^2} = T = \frac{1}{1+\frac{Vo^2}{4(Vo-E)E}Sinh^2\left[\frac{a}{h}\sqrt{2m\,(Vo-E)}\right]}$

Και $R = 1 - T$

Για E>Vo, έχουμε

⇨ $l = \frac{\sqrt{2m(E-Vo)}}{h^2}$

Έτσι, οι λύσεις στο διάστημα 0< x < a είναι της μορφής

$$\psi_{II}(x) = C'e^{i\,l\,x} + D'e^{-i\,lx}$$

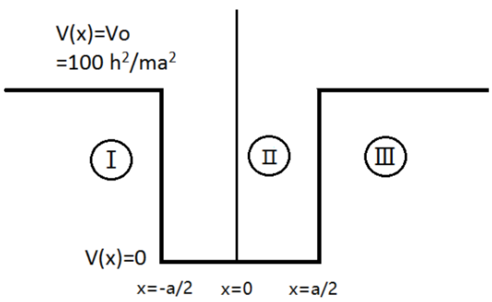
Η διαδικασία για την εύρεση της διαπερατότητας είναι ακριβώς η ίδια, με τη διαφορά ότι πλέον τα εκθετικά είναι της μορφής $e^{i\,l\,x}$ αντί για $e^{l\,x}$. Αυτό, στην αντικατάσταση των εκθετικών (11) δίνει

$$\left(e^{i\,l\,a} - e^{-i\,l\,a}\right) = 2i\,Sin(la), \left(e^{-i\,l\,a} + e^{i\,l\,a}\right) = 2Cos(la)$$

Με αυτές τις σχέσεις, είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

$$\frac{|F'|^2}{|A'|^2} = T = \frac{1}{1 + \frac{Vo^2}{4(E-Vo)E} Sin^2\left[\frac{a}{h}\sqrt{2m\,(E-Vo)}\right]}$$

Άσκηση 2



Περιοχή Ι:

x<-α/2 , V=V_o, 0< E<Vo

- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} + Vo\,\psi_I = E\,\psi_I$
- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = (E-Vo)\psi_I$
- ⇨ $\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}(E-Vo)\psi_I$
- ⇨ $\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = k^2\,\psi_I \qquad (\mathrm{E}-\mathrm{Vo}\,<\,0)$
- ⇨ $k = \frac{\sqrt{2m(E-Vo)}}{h^2}$
- ⇨ $\psi_I(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx}$
- ⇨ $\mathrm{x} \to -\infty => \; Ae^{k\infty} = \infty$
- ⇨ $A = 0$
- ⇨ $\psi_I(x) = Be^{kx}$

Περιοχή ΙΙΙ:

x<α/2 , V=V_o, 0< E<Vo

- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{III}}{dx^2} + Vo\,\psi_{III} = E\,\psi_{III}$

- $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{III}}{dx^2} = (E - Vo)\psi_{III}$
- $\frac{d^2\,\psi_{III}}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}(E - Vo)\psi_{III}$
- $\frac{d^2\,\psi_{I}}{dx^2} = k^2\,\psi_{III}$ $\quad (\mathrm{E - Vo} < 0)$
- $k = \frac{\sqrt{2m(E-Vo)}}{h^2}$
- $\psi_{III}(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$
- $\mathrm{x} \to \infty => Ge^{k\infty} = \infty$
- $G = 0$
- $\psi_{III}(x) = Fe^{-kx}$

Περιοχή ΙΙ:

-α/2 < x< α/2 , V=0, E>0

- $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = E\,\psi_{II} => -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = E\psi_{II}$
- $\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}E\,\psi_{II} => \frac{d^2\,\psi_{I}}{dx^2} = -l^2\,\psi_{II}$
- $l = \frac{\sqrt{2mE}}{h^2}$
- $\psi_{II}(x) = C\,Sin(l\,x) + D\,Cos(lx)$

Γνωρίζω (άσκηση 2.1 c του Griffiths) ότι όταν έχω ένα συμμετρικό δυναμικό [V(x)=V(-x)], οι λύσεις είναι εναλλάξ άρτιες και περιττές. Έτσι θα έχω για τις άρτιες,

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{-kx} & ,x > a/2 \\ D\,Cos(lx) & ,0 < x < a/2 \\ \psi(-x) & ,x < 0 \end{cases}$$

Και για τις περιττές,

$$\psi(x) = \begin{cases} Fe^{-kx} & ,x > a/2 \\ D\,Sin(lx) & ,0 < x < a/2 \\ -\psi(-x) & ,x < 0 \end{cases}$$

Εφαρμόζω συνοριακές συνθήκες:

x=α/2:

Άρτιες:

1. $\psi_{III}(x) = \psi_{II}(x)$

   - $Fe^{-kx} = D\,Cos(\frac{la}{2})$ (1)

2. $\psi'_{III}(x) = \psi'_{II}(x)$

   - $-kFe^{-kx} = -lD\,Sin(\frac{la}{2})$ (2)

Διαιρώ κατά μέλη:

$\Rightarrow \; -\frac{1}{k} = -\frac{1}{l}\, Cot(\frac{la}{2})$

$\Rightarrow \; k = l\, Tan\left(\frac{la}{2}\right)$

Περιττές:

1. $\psi_{III}(x) = \psi_{II}(x)$

$\Rightarrow \; Fe^{-kx} = D\, Sin(\frac{la}{2})$ (1)

2. $\psi'_{III}(x) = \psi'_{II}(x)$

$\Rightarrow \; -kFe^{-kx} = lD\, Cos(\frac{la}{2})$ (2)

Διαιρώ κατά μέλη:

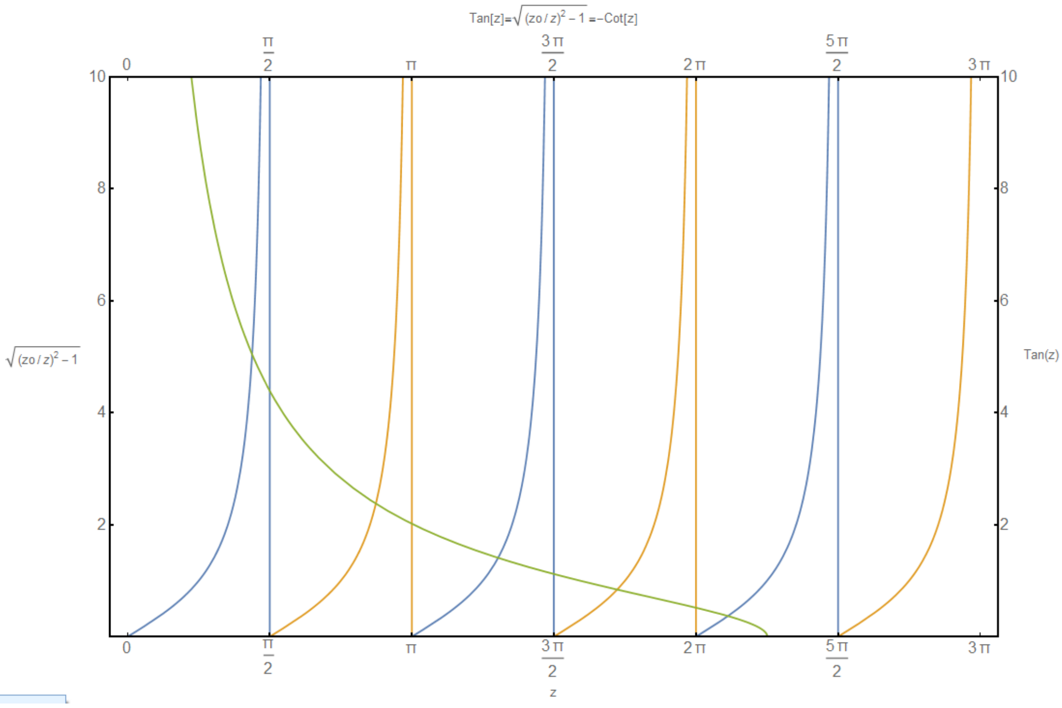
$\Rightarrow \; -\frac{1}{k} = \frac{1}{l}\, Cot(\frac{la}{2})$

$\Rightarrow \; k = -l\, Cot\left(\frac{la}{2}\right)$

Ορίζω:

$$z = \frac{la}{2}, \qquad z_o = \frac{a}{2h}\sqrt{2mV_o}$$

Οι λύσεις αυτές υπολογίζονται γραφικά ή με τη Μέθοδο Newton-Raphson:



Γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων $Tan(z_o) = \sqrt{\left(\frac{z_o}{z}\right)^2 - 1}, -Cot(z_o) = \sqrt{\left(\frac{z_o}{z}\right)^2 - 1}$

Μέθοδος Newton-Raphson:

$$z_n + 1 = z_n + \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$$f(z_n) = Tan(z_o) - \sqrt{\left(\frac{z_o}{z_n}\right)^2 - 1}, άρτιες$$

$$f(z_n) = -Cot(z_o) - \sqrt{\left(\frac{z_o}{z_n}\right)^2 - 1}, περιττές$$

$$zo = \frac{a}{2h}\sqrt{2mVo} = \frac{a}{2h}\sqrt{2m\,100\,h^2/(m\alpha^2\,)} = 5\sqrt{2}$$

$Με\ αυτά, η\ Newton - Raphson\ μας\ δίνει\ 5\ τιμές\ z_n$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1.375 \\ z_2 &= 2.743 \\ z_3 &= 4.095 \\ z_4 &= 5.412 \\ z_5 &= 6.636 \end{aligned}$$

Οι ιδιοενέργειες δίνονται από το

$$z = \frac{la}{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2mE}}{h^2}\frac{a}{2} \Rightarrow z^2 = \frac{2mE}{h}\frac{a^2}{4} \Rightarrow E_n = \frac{2h^2 z_n^2}{ma^2}$$

Χωρίς Vo, αφού το πηγάδι έχει δυναμικό από 0 ως Vo, και όχι από –Vo ως 0 (όπως στο Griffiths)

Και οι κυματοσυναρτήσεις:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} Fe^{-k_n x} & , x > a/2 \\ D\ Cos(l_n x) & , -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ Fe^{k_n x} & , x < -\frac{a}{2} \end{cases} \quad , n = 1,3,5$$

(Άρτιες, κι ας είναι τα n περιττά)

$$\psi_n(x) = \begin{cases} Fe^{-k_n x} & , x > a/2 \\ C\ Sin(l_n x) & , -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ -Fe^{k_n x} & , x < -\frac{a}{2} \end{cases} \quad , n = 2,4$$

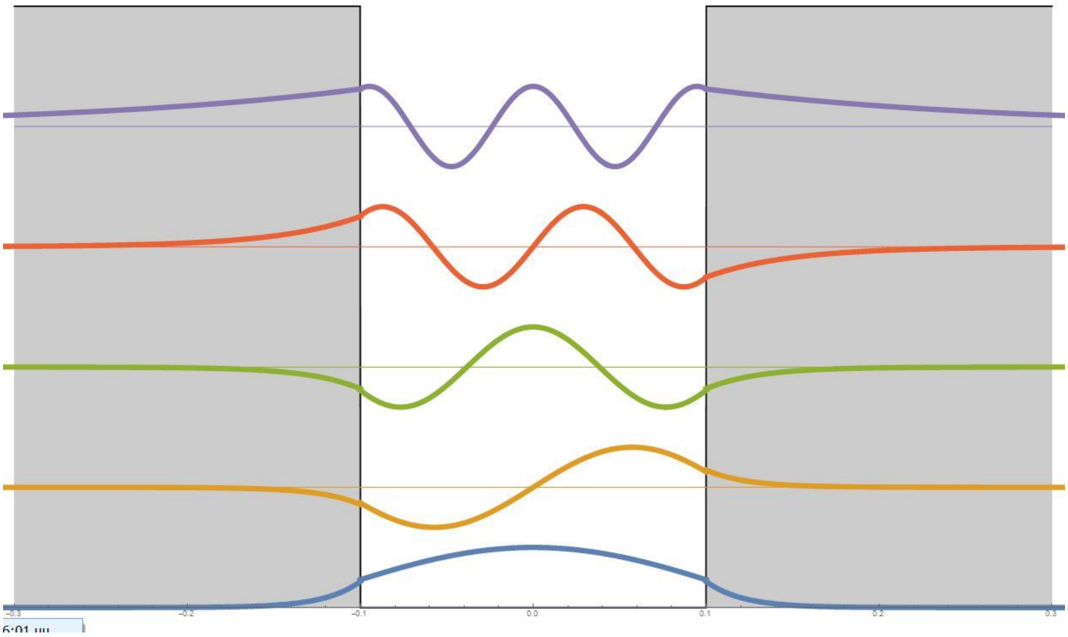
(Περιττές)

Με $$k_n = 50 - z_n$$

$$l_n = 2\frac{z_n}{\mathrm{a}}$$

Και κανονικοποιούμε για την εύρεση των F, D, C.

Οι δέσμιες καταστάσεις φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:



Δέσμιες καταστάσεις για zo=5 $\sqrt{2}$, α=0.2

Σημείωση:

Ο τρόπος με τον οποίο βγαίνει το zo είναι ο εξής:

Το z βγαίνει από το όρισμα του Tan(l a/2) :

$$z = \frac{la}{2}$$

Όμοια, ορίζουμε το ξ, από το k a/2:

$$\xi = \frac{ka}{2}$$

Το οποίο είναι το αντίστοιχο του z, για την ψ(x) έξω από το πηγάδι (εκεί που ορίζουμε το k). Αλλά:

$$\xi^2 + z^2 = (k^2 + l^2)\frac{a^2}{2^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\xi^2 + z^2} = \sqrt{k^2 + l^2}\,\frac{a}{2} = z_o^2$$

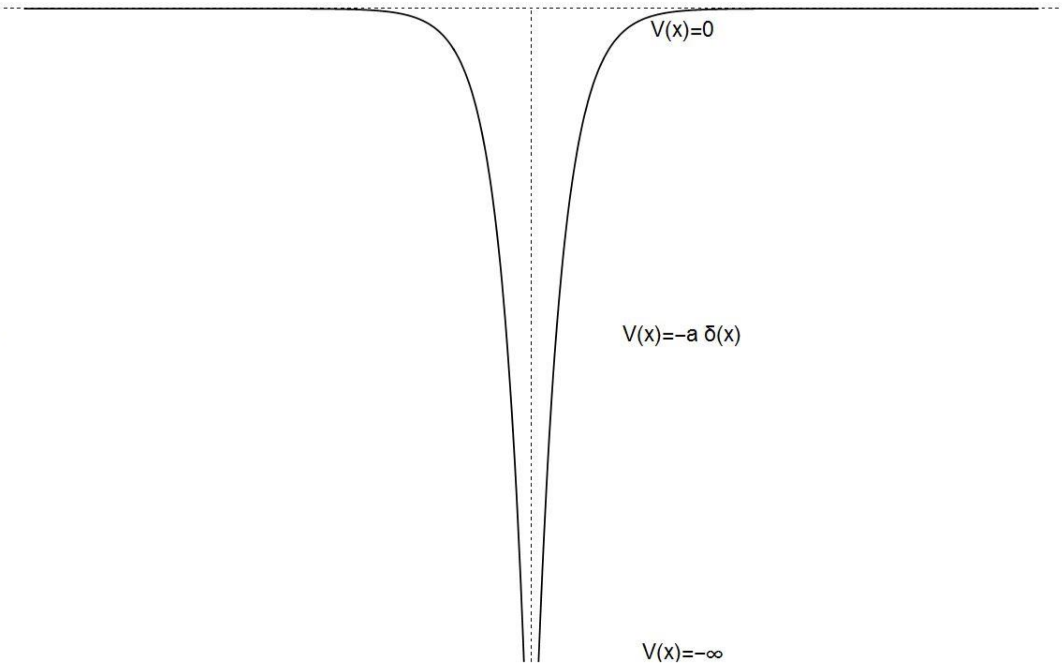
Σημείωση 2:

Όσοι ακολούθησαν τη λύση

$$\sqrt{z_o^2 - z^2} = \begin{cases} zTan(z) \\ -zCot(z) \end{cases}$$

Θα πρέπει και πάλι να βρουν 5 λύσεις με τα ίδια z, και άρα τις ίδιες ενέργειες. Η διαφορά είναι ότι, αντί για τη μη αναγνωρίσιμη μορφή της πράσινης γραμμής στη γραφική παράσταση της λύσης, αυτό που διαγράφεται είναι το τεταρτημόριο ενός κύκλου με ακτίνα zo.

Άσκηση 3



Περιοχή Ι:

x<0, V=0, E<0

- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = E\,\psi_I$
- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = E\psi_I$
- ⇨ $\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}E\psi_I$
- ⇨ $\frac{d^2\,\psi_I}{dx^2} = k^2\,\psi_I \qquad (\mathrm{E} < \ 0)$
- ⇨ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{h^2}$
- ⇨ $\psi_I(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$
- ⇨ $\mathrm{x} \to -\infty => \ Ae^{k\infty} = \infty$
- ⇨ $A = 0$
- ⇨ $\psi_I(x) = Be^{kx}$

Περιοχή ΙΙ:

x>0, V=0, E<0

- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = E\,\psi_{II}$
- ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = E\psi_{II}$
- ⇨ $\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = -\frac{2m}{h^2}E\psi_{II}$
- ⇨ $\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2} = k^2\,\psi_{II} \qquad (\mathrm{E} < 0)$
- ⇨ $k = \frac{\sqrt{2mE}}{h^2}$
- ⇨ $\psi_{II}(x) = Fe^{-kx} + Ge^{kx}$
- ⇨ $\mathrm{x} \to \infty => Ge^{k\infty} = \infty$
- ⇨ $G = 0$
- ⇨ $\psi_{II}(x) = Fe^{-kx}$

Εφαρμόζω συνοριακές συνθήκες

1. $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$
   - ⇨ $Be^{k0} = F\,e^{k0}$
   - ⇨ F=B
2. $\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0)$

   Όμως, στο x=0 το δυναμικό απειρίζεται, άρα υπάρχει ασυνέχεια στην παράγωγο. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε, όμως, είναι να βρούμε μία σχέση για την παράγωγο ακριβώς πριν και ακριβώς μετά τον απειρισμό. Για να το καταφέρουμε αυτό, ολοκληρώνουμε την εξίσωση του Schrodinger σε κάποιο μικρό διάστημα, από -ε έως ε.

   - ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d^2\,\psi_{II}}{dx^2}dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi_{II}dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}E\,\psi_{II}dx$
   - ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\left.\frac{d\,\psi_{II}}{\mathrm{d\,x}}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi_{II}dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi_{II}dx$

   Όπου το πρώτο ολοκλήρωμα έγινε $\left.\frac{d\,\psi_{II}}{\mathrm{d\,x}}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$, από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού. Επόμενο βήμα, να στείλουμε το ε στο 0:

   - ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{d\,\psi}{\mathrm{d\,x}}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi\,dx$
   - ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\left.\frac{d\,\psi}{\mathrm{d\,x}}\right|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^-}^{0^+}V(x)\psi dx = E\int_{0^-}^{0^+}\psi\,dx$

   Όπου το δεύτερο σκέλος μηδενίζεται, γιατί είναι το ολοκλήρωμα μιας πεπερασμένης συνάρτησης σε μηδενικό εμβαδό. Το δεύτερο ολοκλήρωμα του πρώτου σκέλους, όμως, δε μηδενίζεται, γιατί η συνάρτηση V(x) απειρίζεται, και βρίσκεται ακριβώς επάνω στο x=0, δηλαδή στο διάστημα της ολοκλήρωσης. Οπότε ισχύει ο γνωστός τύπος του ολοκληρώματος δ-συνάρτησης:

   - ⇨ $-\frac{h^2}{2m}\left.\frac{d\,\psi}{\mathrm{d\,x}}\right|_{0^-}^{0^+} - a\psi(0) = 0$
   - ⇨ $\left.\frac{d\,\psi}{\mathrm{d\,x}}\right|_{0^-}^{0^+} = -\frac{2ma}{h^2}\psi(0)$

   Βρίσκουμε την παράγωγο της κυματοσυνάρτησης εκατέρωθεν του x=0:

   $$\left.\frac{d\,\psi_{II}}{\mathrm{d\,x}}\right|_{x=0^+} = -Bke^{-k0} = -Bk$$

$$\left.\frac{d\,\psi_I}{\mathrm{d\,x}}\right|_{x=0^+} = Bke^{k0} = Bk$$

⇨ $\left.\frac{d\,\psi_{II}}{\mathrm{d\,x}}\right|_{x=0^+} - \left.\frac{d\,\psi_I}{\mathrm{d\,x}}\right|_{x=0^-} = -2Bk$

Επίσης,

$\psi(0) = B$

Και πλέον μπορούμε να αντικαταστήσουμε

⇨ $-2Bk = -\frac{2ma}{h^2}\,B$

⇨ $k = m\frac{a}{h^2}$

Και αφού $E = -\frac{h^2k^2}{2m}$ (το k το είχαμε εκφράσει ως προς E, από τη λύση της εξίσωσης ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής και στις δυο περιοχές)

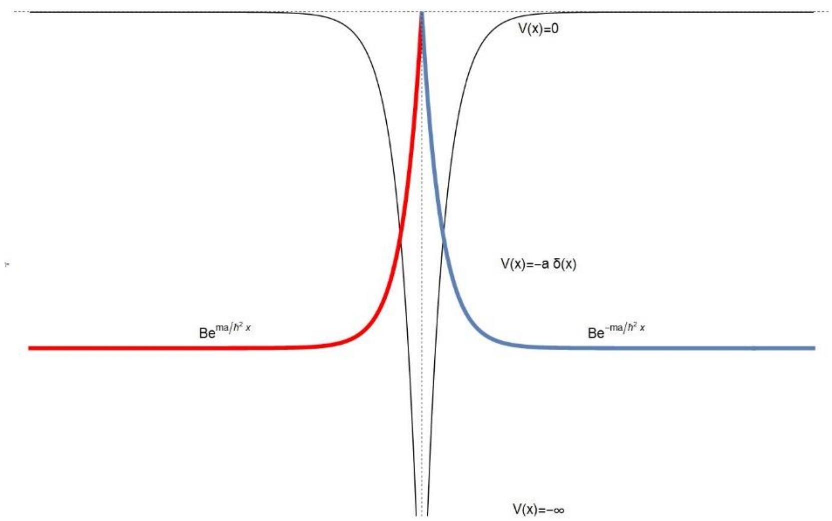
$$\mathrm{E} = -\frac{\mathrm{m}\alpha^2}{2h^2}$$

Κανονικοποιώντας βρίσκουμε

$$B = \sqrt{k}$$

Και τελικά,

$$\psi(x) = \sqrt{m\frac{a}{h^2}}\,e^{-m\frac{a}{h^2}|x|}$$



Άσκηση 4

$$\alpha)\ \psi_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x)e^{-i\,k\,x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(x-x_o)+\delta(x+x_o)]e^{-i\,k\,x}\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+x_o)e^{-i\,k\,x}\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_o)e^{-i\,k\,x}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(e^{-ikxo}+e^{ikxo}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}Cos(k\,xo)$$

$$\beta)\ \psi_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2(x)e^{-i\,k\,x}\,dx$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}e^{-i\,k\,x}\,dx$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\frac{x^2}{2\sigma}+ik\sigma)^2-k^2\sigma^2}\,dx$$

Αντικαθιστώ $u = \frac{x+2ik\sigma^2}{2\sigma}$ και λύνω,

$$\psi_2(k) = A\sqrt{2}\sigma e^{-k^2\sigma^2}$$

$$γ)\ \Phi(k) = \frac{A}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4\sigma^2}}+e^{-\frac{(x+x_o)^2}{4\sigma^2}}\right]e^{-i\,k\,x}\,dx$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4\sigma^2}}e^{-i\,k\,x}\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+x_o)^2}{4\sigma^2}}e^{-i\,k\,x}\,dx\right]$$

Με τον ίδιο τρόπο που βρήκαμε την $\psi_2(k)$,

$$\Phi_2(k) = 2A\,\sigma\,Cos(k\,x_o)e^{-k^2\sigma^2}$$

δ) Πρέπει να δείξω ότι

$$\sqrt{2\pi}\,FT[\psi_1(x)]\,FT[\psi_2(x)] = FT[\Phi(x)] = FT[\psi_1(x)*\psi_2(x)]$$

Σημείωση: στην αρχική εκφώνηση έλειπε ένα $\sqrt{2\pi}$ μπροστά από το πρώτο σκέλος. Ο παράγοντας $\sqrt{2\pi}$ έχει να κάνει με τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier: υπάρχουν διάφοροι ορισμοί με διάφορες κανονικοποιήσεις, και πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός στην επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα κάνει το FT.

Από τα α), β), γ) έχουμε

$$FT[\psi_1(x)] = \psi_1(k),\quad FT[\psi_2(x)] = \psi_2(k),\qquad FT[\Phi(x)] = \Phi(k)$$

$$\sqrt{2\pi}FT[\psi_1(x)]\,FT[\psi_2(x)] = \sqrt{2\pi}\,A\sqrt{2}\sigma e^{-k^2\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}Cos(k\,xo)$$
$$= 2A\,\sigma\,Cos(k\,x_o)e^{-k^2\sigma^2} = \Phi(k) = FT[\Phi(x)]$$

$$\psi_1(x) * \psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(y)\psi_2(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(y)\psi_2(x-y)\,dy$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(y-x_o\,) + \delta(y+x_o)]\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4\sigma^2}}dy$$
$$= \frac{A}{2}(e^{-\frac{(x-x_o)^2}{4\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+x_o)^2}{4\sigma^2}})$$

Το οποίο όμως ισούται με το $\Phi(x)$. Άρα

$$FT[\psi_1(x) * \psi_2(x)] = FT[\Phi(x)] = \sqrt{2\pi}FT[\psi_1(x)]\,FT[\psi_2(x)]$$