1ο Σετ Ασκήσεων

Πρόβλημα 1

Η μέθοδος Gram-Schmidt είναι μία μέθοδος που μας επιτρέπει να ορθοκανονικοποιήσουμε ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις (και διανύσματα γενικότερα). Έστω λοιπόν ότι αρχικά έχουμε το σύνολο των συναρτήσεων $\{\chi_1, \chi_2, \ldots\}$ που ανήκουν σε έναν διανυσματικό χώρο V. Για να φτιάξουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

- Πρώτα απ' όλα κανονικοποιούμε τη χ_1

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{\chi_1}{\|\chi_1\|}}$$

$\|\chi_1\| \rightarrow$ το μέτρο της

- Στη συνέχεια για να βρούμε τη φ_2 πρέπει να βεβαιωθούμε ότι είναι κάθετη στη φ_1 και στη συνέχεια να κανονικοποιήσουμε. Ως ενδιάμεσο βήμα ψάχνουμε μία ψ_2 της μορφής:

$\boxed{\psi_2 = \chi_2 + c_{12}\varphi_1}$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \varphi_1 | \psi_2 \rangle = \int \varphi_1^*(x)\psi_2(x)dx = 0$. Έπειτα μπορούμε να θέσουμε

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{\psi_2}{\|\psi_2\|}}$$

Έχουμε λοιπόν $0 = \langle \varphi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \chi_2 \rangle + c_{12} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad c_{12} = - \langle \phi_1 | \chi_2 \rangle.$

Άρα $\psi_2 = \chi_2 - \langle \phi_1 | \chi_2 \rangle \varphi_1$, $\varphi_2 = \dfrac{\psi_2}{\|\psi_2\|}$

- Για να βρούμε τη φ_3 πρέπει πρώτα να βεβαιωθούμε ότι είναι ορθογώνια στη φ_1 και φ_2. Ψάχνουμε λοιπόν μια συνάρτηση της μορφής

$$\psi_3 = \chi_3 + c_{13}\varphi_1 + c_{23}\varphi_2$$

$$0 = \langle \varphi_1 | \psi_3 \rangle = \langle \varphi_1 | \chi_3 \rangle + c_{13} \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle + c_{23} \underbrace{\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle}_{=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{13} = - \langle \phi_1 | \chi_3 \rangle$$

$$0 = \langle \varphi_2 | \psi_3 \rangle = \langle \varphi_2 | \chi_3 \rangle + c_{13} \underbrace{\langle \varphi_2 | \phi_1 \rangle}_{=0} + c_{23} \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{23} = - \langle \phi_2 | \chi_3 \rangle$$

Άρα $\psi_3 = \chi_3 - \langle \phi_1 | \chi_3 \rangle \phi_1 - \langle \phi_2 | \chi_3 \rangle \phi_2$

- Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κάθε συνάρτηση ϕ_j προκύπτει ως εξής:

$$\psi_j = \chi_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \phi_k | \chi_j \rangle \phi_k$$

$$\phi_j = \frac{\psi_j}{\|\psi_j\|}$$

Σε αυτή την άσκηση σκοπός είναι να εφαρμόσουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω για τις συναρτήσεις $\underset{\chi_1}{1}, \underset{\chi_2}{x}, \underset{\chi_3}{x^2}, \underset{\chi_4}{x^3}, \underset{\chi_5}{x^4}$

$$- \ \varphi_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\left(\int_{-1}^{1} 1^2 dx\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$- \ \psi_2 = x - \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} | x \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} | x \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x \, dx = 0$$

Αρα $\psi_2 = x$, $\quad \|\psi_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$.

Αρα $\varphi_2 = \dfrac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\, x$

$$\cdot \ \psi_3 = x^2 - \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} | x^2 \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} - \langle \sqrt{\tfrac{3}{2}} x | x^2 \rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x$$

$$\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} | x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}} x | x^2 \rangle = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = 0$$

Αρα $\psi_3 = x^2 - \frac{1}{3}$, $\quad \|\psi_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{8}{45}$

Αρα $\varphi_3 = \dfrac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \left(\dfrac{3}{2} x^2 - \dfrac{1}{2}\right)$

$$\cdot\ \psi_4 = x^3 - \left\langle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) \middle| x^3 \right\rangle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) - \left\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x \middle| x^3 \right\rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x -$$

$$- \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} \middle| x^3 \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) \middle| x^3 \right\rangle = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) \cdot x^3 \, dx = 0$$

$$\left\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x \middle| x^3 \right\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x \cdot x^3 \, dx = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \cdot \tfrac{2}{5}$$

$$\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} \middle| x^3 \right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^3 \, dx = 0$$

Άρα $\psi_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$, $\quad \|\psi_4\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = \frac{8}{175}$

Άρα $\psi_4 = \dfrac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\sqrt{\frac{8}{175}}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) = \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$

$$\cdot\ \psi_5 = x^4 - \left\langle \sqrt{\tfrac{7}{2}}\left(\tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x\right) \middle| x^4 \right\rangle \sqrt{\tfrac{7}{2}}\left(\tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x\right) -$$

$$- \left\langle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) \middle| x^4 \right\rangle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) - \left\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x \middle| x^4 \right\rangle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x - \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} \middle| x^4 \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle \sqrt{\tfrac{7}{2}}\left(\tfrac{5}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x\right) \middle| x^4 \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \sqrt{\tfrac{5}{2}}\left(\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\right) \middle| x^4 \right\rangle = \dots = \sqrt{\tfrac{5}{2}} \cdot \tfrac{8}{35}$$

$$\left\langle \sqrt{\tfrac{3}{2}}x \middle| x^4 \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} \middle| x^4 \right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{2}{5}$$

Άρα $\psi_5 = x^4 - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}$

$$\|\psi_5\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(x^4 - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}\right)^2 dx = \frac{128}{11025}$$

Άρα $$\varphi_5 = \frac{x^4 - \frac{4}{7}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{128}{11025}}} = \ldots = \frac{3}{8\sqrt{2}}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$$

Πρόβλημα 2: $\psi_0(x) = A(a^4 - x^4) \quad -a < x < a$

α) Πρέπει $\int_{-a}^{a} |\psi_0(x)|^2 dx = 1$

$$\int_{-a}^{a} |\psi_0(x)|^2 dx = \int_{-a}^{a} |A|^2 (a^4 - x^4)^2 dx = |A|^2 \int_{-a}^{a} (a^8 - 2a^4x^4 + x^8)\, dx =$$

$$= |A|^2 \left[a^8 x - 2a^4 \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9}\right]_{-a}^{a} = \ldots = \frac{64a^9}{45}|A|^2 = 1 \iff$$

$$\iff A = \frac{3\sqrt{5}}{8}\frac{1}{a^{9/2}} e^{i\varphi}$$

β) $$\langle x \rangle = \int_{-a}^{a} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 x\, dx = \int_{-a}^{a} \underbrace{|A|^2 (a^4 - x^4)^2 x}_{\text{περιττή}}\, dx =$$

$$= 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-a}^{a} |\psi(x)|^2 x^2 dx = \int_{-a}^{a} |A|^2 (a^4 - x^4)^2 x^2 dx =$$

$$= |A|^2 \int_{-a}^{a} (a^8 - 2a^4x^4 + x^8) x^2 dx = \ldots = \frac{64}{231} a^{11} |A|^2$$

Άρα $$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{8}{\sqrt{231}} a^{11/2} |A|$$

$$\langle p\rangle = \int_{-a}^{a} \psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)\right)dx = -i\hbar\int_{-a}^{a}|A|^2(-x^4+a^4)(-4x^3)\,dx = 0$$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-a}^{a}\psi^*_{(x)}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi(x)\,dx = -\hbar^2\int_{-a}^{a}|A|^2(a^4-x^4)(-12x^2)$$

$$= 12\hbar^2|A|^2\int_{-a}^{a}(a^4x^2-x^6)\,dx = \ldots = \frac{32a^7}{7}|A|^2\hbar^2$$

Αρα $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \frac{4\sqrt{2}}{7}|A|\hbar a^{7/2}$

γ) $\sigma_x\sigma_p = \frac{8}{\sqrt{231}}\frac{4\sqrt{2}}{7}\hbar|A|^2a^9 = \frac{32\sqrt{2}}{\sqrt{231}\cdot 7}\frac{45}{64}\cdot\frac{1}{a^9}\hbar a^9 \simeq 0{,}79\hbar \geq$

Αρα δεν παραβιάζεται η αρχή του Heisenberg.

Πρόβλημα 3: $\Phi(x,0) = A\left[\psi_n(x) + \psi_m(x)\right]$

α) $\int_0^a |\Phi(x,0)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow |A|^2 \int_0^a \left(\psi_n^*(x) + \psi_m^*(x)\right)\left(\psi_n(x) + \psi_m(x)\right) dx = 1 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow |A|^2 \int_0^a \left[\psi_n^*(x)\psi_n(x) + \psi_n^*(x)\psi_m(x) + \psi_m^*(x)\psi_n(x) + \psi_m^*(x)\psi_m(x)\right] dx = 1$

Όμως $\int_0^a \psi_n^*(x)\psi_m(x) dx = \delta_{mn}$

Άρα $|A|^2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}$

Επειδή μια φάση $e^{i\varphi}$ δεν έχει καμία φυσική σημασία διαλέγω

$\varphi = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

β) $\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} + \psi_m(x) e^{-iE_m t/\hbar}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{n^2\pi^2\hbar t}{2Ma^2}} + \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-i\frac{m^2\pi^2\hbar t}{2Ma^2}}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-in^2\omega t} + \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-im^2\omega t}\right)$

$$|\Phi(x,t=0)|^2 = \Phi^*(x,0)\,\Phi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^* + \psi_m^*)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n + \psi_m) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\psi_n|^2 + |\psi_m|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{\psi_n^*\psi_m\} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + 2\cdot\frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]$$

γ) $$\langle x(t)\rangle = \int_0^a \Phi^*(x,t)\, x\, \Phi(x,t)\, dx = \int_0^a x\,|\Phi(x,t)|^2 dx$$

$$|\Phi(x,t)|^2 = \Phi^*(x,t)\cdot\Phi(x,t) = \frac{1}{2}\Big(|\psi_n(x,t)|^2 + |\psi_m(x,t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\{\psi_n^*(x,t)\psi_m(x,t)\} \Big) =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{ \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t(m^2-n^2)} \right\} \right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos(\omega t(n^2-m^2)) \right]$$

Άρα $$\langle x(t)\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a \left[x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + x\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + 2\cos(\omega t(n^2-m^2))\, x \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 2\cos(\omega t(n^2-m^2)) \cdot \frac{2a^2 mn}{(m^2-n^2)^2 n^2}\left(-1+(-1)^{n+m}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{4\left(-1+(-1)^{m+n}\right) a^2 mn}{(m^2-n^2)^2 n^2}\cos(\omega t(n^2-m^2)) \right)$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $\frac{4amn\left(-1+(-1)^{m+n}\right)}{(m^2-n^2)^2 n^2}$

και η συχνότητα: $\omega(n^2-m^2)$

d) $\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{a}\int_0^a \Big[x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + x^2\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + 2x^2\cos(\omega t(n^2-m^2)) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\Big]dx$

$$= \frac{1}{a}\Big[\frac{a^3}{12n^3\pi^3}(2n^3\pi^3 - 3n\pi) + \frac{a^3}{12m^3\pi^3}(2m^3\pi^3 - 3m\pi) + 2\cos(\omega t(n^2-m^2))\cdot\frac{a^3}{2\pi^3}\left(\frac{2(m-n)\pi(-1)^{m-n}}{(m-n)^3} - \frac{2(m+n)\pi(-1)^{n+m}}{(m+n)^2}\right)\Big]$$

$$= \cancel{a}\,\frac{a^2}{12n^3\pi^3}(2n^3\pi^3 - 3n\pi) + \frac{a^2}{12m^3\pi^3}(2m^3\pi^3 - 3m\pi) + \frac{8(-1)^{m+n}}{(m^2-n^2)^2\pi^2}a^2\cos(\omega t(n^2-m^2))$$

Apa $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2} = \dots$

$$\langle p(t)\rangle = M\frac{d}{dt}\langle x(t)\rangle = M\,\frac{4(-1+(-1)^{m+n})amn\omega}{|m^2-n^2|\pi^2}\sin(\omega t(n^2-m^2))$$

$$\langle p^2(t)\rangle = -\hbar^2\int_0^a \phi^*(x,t)\frac{d^2}{dx^2}(\phi(x,t))\,dx$$

$$\phi''(x,t) = \frac{d^2}{dx^2}\phi(x,t) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt2}\left(\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-i\omega n^2 t} + \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)e^{-i\omega m^2 t}\right.\right.$$

$$= -\frac{1}{\sqrt2}\left(\omega n^2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-i\omega n^2 t} + m^2\omega\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)e^{-i\omega m^2 t}\right)$$

Apa $\langle p^2(t)\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\int_0^a \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) - \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cancel{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}^{0}e^{i\omega t(n^2-m^2)} - \frac{2}{a}\sin\left(\cancel{\frac{n\pi x}{a}}\right)^{0}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)e^{i\omega}$

$$= \frac{\hbar^2}{2}\left(\omega n^2\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{2} + \omega m^2\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{2}\right) = \frac{\hbar^2}{2}(n^2+m^2)$$

Αρα $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2_{(t)}\rangle - \langle p(t)\rangle^2} = \ldots$

ε) $\langle H\rangle = |c_n|^2 E_n + |c_m|^2 E_m = \frac{1}{2}(E_n + E_m)$

Οι επιτρεπτές τιμές είναι οι E_n και E_m

<u>Χρήσιμα ολοκληρώματα για αυτήν την άσκηση</u>

$$I_1 = \int_0^a x \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = -\frac{a}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a + \frac{a}{n\pi}\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= -\frac{a^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a = -\frac{a^2\cos n\pi}{n\pi} + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi \overset{n\in\mathbb{N}^*}{=}$$

$$= -\frac{a^2}{n\pi}(-1)^n$$

$$I_2 = \int_0^a x\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{a}{n\pi}\left[x\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right]_0^a - \frac{a}{n\pi}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{a^2}{n\pi}\sin(n\pi) + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] \overset{n\in\mathbb{N}^*}{=} \frac{a^2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$I_3 = \int_0^a x\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \int_0^a x\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{2}\right)dx\,,$$ το οποίο

ανάγεται στο I_2. Χρησιμοποίησα την ταυτότητα $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\left.\begin{aligned} I_4 &= \int_0^a x\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)dx \\ \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} &= \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}\right\} \rightsquigarrow I_4 = \int_0^a x\left(\cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{a}\right] - \cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{a}\right]\right)dx$$

Αυτό το ολοκλήρωμα ανάγεται στο I_2

Πρόβλημα 4

$$\psi_0(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right], \quad 0<x<L$$

α). Πρέπει $\int_0^L |\psi_0(x)|^2 dx = 1$

$$\int_0^L |\psi_0(x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left[1+\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2 dx =$$

$$= |A|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(1+2\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) dx =$$

$$= |A|^2 \int_0^L \left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] dx =$$

$$= |A|^2 \frac{5L}{8} \Leftrightarrow |A| = 2\sqrt{\frac{2}{5L}} \Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{2}{5L}},$$ διάλεξα μηδενική φάση

β) Η ψ_0 μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων του απειρόβαθου πηγαδιού.

$$\psi_0(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \Rightarrow c_n = \int_0^L A\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[1+\cos\frac{\pi x}{L}\right]\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow c_n = \int_0^L A\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx + \int_0^L A\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$\int_0^L A\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} A\sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{L}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}, & n=1 \\ 0 & \text{για } n>1 \end{cases}$$

$$\int_0^L A\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \frac{L}{n}A\sqrt{\frac{2}{L}}\,\frac{1}{2}\left[\cancel{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}^{0}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L - \frac{n}{2}\int_0^L A\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$= -\frac{n}{2}A\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{n}{2}A\sqrt{\frac{2}{L}}\int_0^L \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} & \text{για } n=2 \\ 0 & \text{για } n\neq 2 \end{cases}$$

Άρα $\quad c_n = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} & \text{για } n=1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \text{για } n=2 \\ 0 & \text{για κάθε άλλο } n. \end{cases}$ (*)

Άρα $\quad \psi_0(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x)$

Εάν λοιπόν μετρήσω την ενέργεια τη χρονική στιγμή $t=0$ έχω πιθανότητα $P_1 = \frac{4}{5}$ να μετρήσω την ενέργεια $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ και $P_2 = \frac{1}{5}$ να μετρήσω

$E_2 = 4\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

(*) Αυτή η διαδικασία που ακολούθησα είναι η αναλυτική. Διαφορετικά και λιγότερο χρονοβόρα μπορούσε κανείς να γράψει:

$$\psi_0(x) = A\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) = A\sqrt{\frac{L}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)$$

$$= A\sqrt{\frac{L}{2}}\left(\psi_1(x) + \frac{1}{2}\psi_2(x)\right) \Longrightarrow$$ προκύπτει αμέσως

$$A = 2\sqrt{\frac{2}{5L}}$$

γ) Εάν λύσω την εξίσωση Shrödinger προφανώς θα βρω τις ιδιοσυναρτήσεις του απειρόβαθου πηγαδιού

Στο πρόβλημά μας έχουμε $\psi(x,0) = \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x)$

Άρα $\psi(x,t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x) e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x) e^{-i4\omega t}, \quad \omega = \frac{n^2\hbar}{2ma^2}$$

δ) $\langle x(t)\rangle = \int_0^L \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)\, dx = \int_0^L x\,|\psi(x,t)|^2 dx$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{4}{5}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{5}|\psi_2(x)|^2 + \frac{2}{5}\, 2\, \mathrm{Re}\{\psi_1^+ e^{i\omega t}\psi_2 e^{-i4\omega t}\} =$$

$$= \frac{4}{5}|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{5}|\psi_2(x)|^2 + \frac{4}{5}\psi_1(x)\psi_2(x)\cos(3\omega t)$$

Άρα $\langle x(t)\rangle = \int_0^L \left[\frac{4}{5}x|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{5}x|\psi_2(x)|^2 + \frac{4}{5}x\,\psi_1(x)\psi_2(x)\cos(3\omega t)\right]dx$

$$= \frac{4}{5}\frac{2}{\cancel{L}}\frac{L^2}{4} + \frac{1}{5}\frac{2}{L}\cdot\frac{L^2}{4} + \frac{4}{5}\frac{2}{\cancel{L}}\cos(3\omega t)\left(-\frac{8L^2}{9n^2}\right)$$

$$= \frac{3}{10}L - \frac{64}{45n^2}L\cos(3\omega t)$$

$$\langle x^2(t)\rangle = \int_0^L \left[\frac{4}{5}x^2|\psi_1(x)|^2 + \frac{1}{5}x^2|\psi_2(x)|^2 + \frac{4}{5}x^2\psi_1(x)\psi_2(x)\cos(3\omega t)\right]dx$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{\cancel{L}}\frac{1}{12}L^3\left(2-\frac{3}{n^2}\right) + \frac{1}{5}\frac{2}{L}\frac{L^3(-3+8n^2)}{48n^2} + \frac{4}{5}\frac{2}{\cancel{L}}\cos(3\omega t)\left(-\frac{8L^3}{9n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{120}L^2\left(40-\frac{51}{n^2}\right) - \frac{64}{45}\frac{L^2}{n^2}\cos(3\omega t)$$

Αρα $\Delta x = \sqrt{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2} = \left[\frac{1}{120}L^2\left(40-\frac{51}{n^2}\right) - \frac{64L^2\cos(3\omega t)}{45n^2} - \left(\frac{3L}{10} - 64L\cos(3\omega t)\right)^2\right]^{1/2}$

ε) Έχουμε βρει ότι $\psi(x,t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{5}}\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$

Αρα εάν μετρήσω τη χρονική στιγμή t την ενέργεια να βρω E_1 και έχω πιθανότητα $P_1 = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-E_1t/\hbar}\right|^2 = \frac{4}{5}$

$P_2 = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-iE_2t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{5}$ την E_2