Πανεπιστήμιο Κρήτης,
Τμήμα Φυσικής

Κβαντομηχανική Ι

1ο Σετ Ασκήσεων

Άσκηση 1

$$\psi_o\,(x) = A\,(\alpha^2 - x^2), -a < x < a$$

a) $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 - x^2)^2 dx = 1$

$$\int_{-a}^{a} (\alpha^2 - x^2)^2 dx = \int_{-a}^{a} (\alpha^4 - 2a^2x^2 + x^4) dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \alpha^4 dx - \int_{-a}^{a} 2a^2x^2 dx + \int_{-a}^{a} x^4 dx$$

$$= 2a^5 \qquad - \frac{4a^5}{3} \qquad + \frac{2a^5}{5}$$

$$A^2\left(2a^5 - \frac{4a^5}{3} + \frac{2a^5}{5}\right) = A^2 \frac{15}{16} a^5 = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow A = \frac{\sqrt{15}}{4a^{\frac{5}{2}}}}$$

b) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha^2 - x^2)^2 dx$

$$A^2 \int_{-a}^{a} \left(\overbrace{\alpha^4 x}^{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}} - \overbrace{2a^2x^3}^{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}} + \overbrace{x^5}^{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}} \right) dx = 0$$

Άσκηση 2

$$\psi\,(x) = A\,x\,e^{-bx^2}$$

a) Κανονικοποίηση

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2bx^2} dx = 1$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$u = x, dv = xe^{-2bx^2} dx$$

$$du = dx, v = -\frac{e^{-2bx^2}}{4b}$$

Διδάσκων: Πέτρος Ρακιτζής
Βοηθός: Αλέξανδρος Σπηλιώτης

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dv = uv|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v\, du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2bx^2} dx = \cancel{-\frac{xe^{-2bx^2}}{4b}\Big|_{-\infty}^{\infty}} \quad - \left(-\frac{1}{4b}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx$$

(περιττή $*$ άρτια σε συμμετρικο διάστημα)

$$\boxed{\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2bx^2} dx = \frac{1}{4b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx = ?$$

$$u = x\sqrt{2b}, \quad du = \sqrt{2b}\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2b}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} Erf(u)|_{-\infty}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2bx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}[1-(-1)] \boxed{= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2b}}}$$

$$\Rightarrow A^2 \frac{1}{4b}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2b}} = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow A = \frac{4b\sqrt{2b}}{\sqrt{\pi}}}$$

β) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-2bx^2} dx$

$$\boxed{\Rightarrow \langle x \rangle = 0}$$

ως περιττή σε συμμετρικό διάστημα.

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, p\, \psi(x) dx = -i\hbar A^2 \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-bx^2}\frac{d}{dx}\left(xe^{-bx^2}\right) dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-bx^2}\right) = e^{-bx^2} - 2bx^2 e^{-bx^2}$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle = -i\hbar A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{xe^{-bx^2}}^{\text{περιττή}}\left(\overbrace{e^{-bx^2}}^{\text{άρτια}} - \overbrace{2bx^2 e^{-bx^2}}^{\text{άρτια}}\right) dx$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle p \rangle = 0}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-2bx^2} dx$$

Παραγοντική ολοκλήρωση με $u = x^3, dv = x\, e^{-2bx^2}$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-2bx^2} dx = \frac{3A^2}{4b} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2bx^2} dx$$

$\boxed{\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{3}{4b}}$ *(από την κανονικοποίηση του ερωτήματος α)*

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, p^2\, \psi(x) dx = \hbar^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-bx^2} \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(x e^{-bx^2}\right)\right] dx$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(x e^{-bx^2}\right)\right] = \frac{d}{dx}\left(e^{-bx^2} - 2bx^2 e^{-bx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left[(1 - 2bx^2) e^{-bx^2}\right]$$

$$= (-6bx + 4b^2 x^3) e^{-bx^2}$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle = \hbar^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-bx^2} e^{-bx^2} (4b^2 x^3 - 6bx)\, dx$$

$$= \hbar^2 A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2bx^2} (4b^2 x^3 - 6bx)\, dx$$

$$= -\frac{3\hbar^2}{4} \frac{4b\sqrt{2b}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle p^2 \rangle = 3\hbar^2 b}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{b}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \hbar\sqrt{3b}$$

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{3}{b}}\sqrt{3b} = \frac{3\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2}$$

Άρα η αρχή της αβεβαιότητας δεν παραβιάζεται εδώ.

γ) Πρέπει $|\psi(x)|^2 = max$

$$|\psi(x)|^2 = A^2 x^2 e^{-2bx^2}$$

$$\frac{d|\psi(x)|^2}{x} = A^2 (2x - 4bx^3) e^{-2bx^2} = 0$$

$$2x = 4bx^3$$

$$x = \begin{cases} 0, & \Rightarrow \psi(x) = 0 \ (\mu\eta\ \alpha\pi o\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}) \\ & \pm\dfrac{1}{\sqrt{2b}} \end{cases}$$

Άρα η μέγιστη πιθανότητα είναι στα σημεία $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2b}}$

Άσκηση 3

$$\Phi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

α) $\int_0^{\alpha} |\Phi(x)|^2 dx = 1$

$$\int |\Phi(x,0)|^2 dx = 1$$

$$1 = |A|^2 \int (|\psi_1|^2 + \cancel{\psi_1^* \psi_2} + \cancel{\psi_2^* \psi_1} + |\psi_2|^2 dx$$

$$\left[\int \psi_n^* \psi_m dx = \delta_{nm}\right]$$

$$\Rightarrow 1 = |A|^2 \int (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dx = 2|A|^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

β) $\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\psi_1(x) e^{-i\frac{E_o t}{\hbar}} + \psi_2(x) e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\right]$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2}{a}}\left[Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t} + Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-4i\omega t}\right] \qquad \left[\omega = \frac{E_n}{n^2\hbar} = \frac{\pi^2\hbar}{2m\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} e^{-i\omega t}\left[Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-3i\omega t}\right]$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \left\{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} e^{-i\omega t}\left[Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-3i\omega t}\right]\right\}^* \left\{\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} e^{-i\omega t}\left[Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) e^{-3i\omega t}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\alpha}\left[Sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + Sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + 2\, Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) Cos(3\omega t)\right]$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε

$$e^{-i\omega t} e^{i\omega t} = 1$$
$$e^{-3i\omega t} + e^{3i\omega t} = 2Cos(3\omega t)$$

γ) c) $\langle x(t)\rangle = \frac{1}{25}\left[\int \left(\overbrace{xSin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)}^{a^2/4} + \overbrace{xSin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}^{a^2/4} + \overbrace{2x\, Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\, Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) Cos(3\omega t)}^{-8a^2/9\pi^2}\right]dx\right.$

$$\Rightarrow \langle x(t)\rangle = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{32}{9\pi^2} Cos(3\omega t)\right]$$

Πλάτος: $\frac{16\alpha}{9\pi^2} < \frac{\alpha}{2}$

Συχνότητα: $\Omega = 3\omega = 3\pi \frac{\hbar}{2ma^2}$ $\left(= \frac{E_2 - E_1}{\hbar}\right)$

$$d)\ \langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{25}\left[\int \left(\overbrace{x^2 Sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)}^{\frac{a^3}{12}\left(2-\frac{3}{\pi^2}\right)} + \overbrace{x^2 Sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}^{\frac{a^3}{48\pi^2}(8\pi^2-3)} + \overbrace{2x^2 Sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\ Sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) Cos(3\omega t)}^{-\frac{16a^3 Cos(\omega t)}{9\pi^2}}\right]dx$$

$$\Rightarrow\ \langle x^2(t)\rangle = \frac{a^3}{144\pi^2}\left[-45 + 48\pi^2 - 256Cos(3\omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}$$

$$= \frac{a}{12}\sqrt{\frac{a^3}{144\pi^2}\left[-45 + 48\pi^2 - 256Cos(3\omega t)\right] - 36\left[1 - \frac{32}{9\pi^2}Cos(3\omega t)\right]^2}$$

$$\langle p(t)\rangle = m\ \frac{d\langle x(t)\rangle}{dt} = \frac{16\ ma\omega}{3\pi^2}Sin(3\omega t)$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \sqrt{\langle p^2(t)\rangle - \langle p(t)\rangle^2} =$$

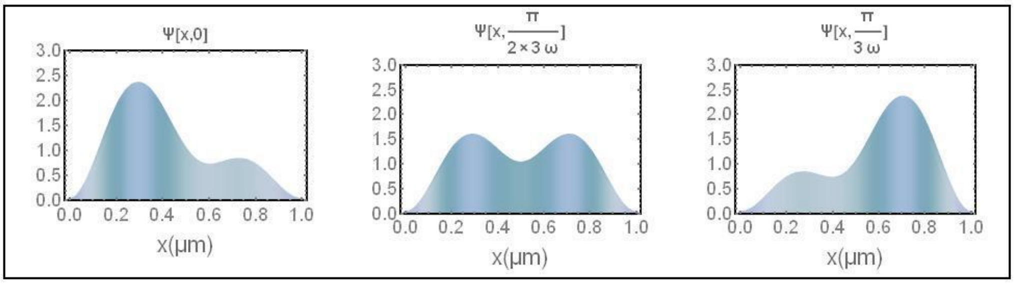
$$= \frac{\hbar}{36\sqrt{2}\pi}\sqrt{-10240 - 2793\pi^3 + 540\pi^4 + 256(-40 + 3\pi^2)Cos(6\omega t)}$$

ε) $\langle H\rangle = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_2) = \frac{5\pi\hbar^2}{4ma^2}$

Επιτρεπτές ενέργειες είναι οι E_1, E_2

Συμπεράσματα

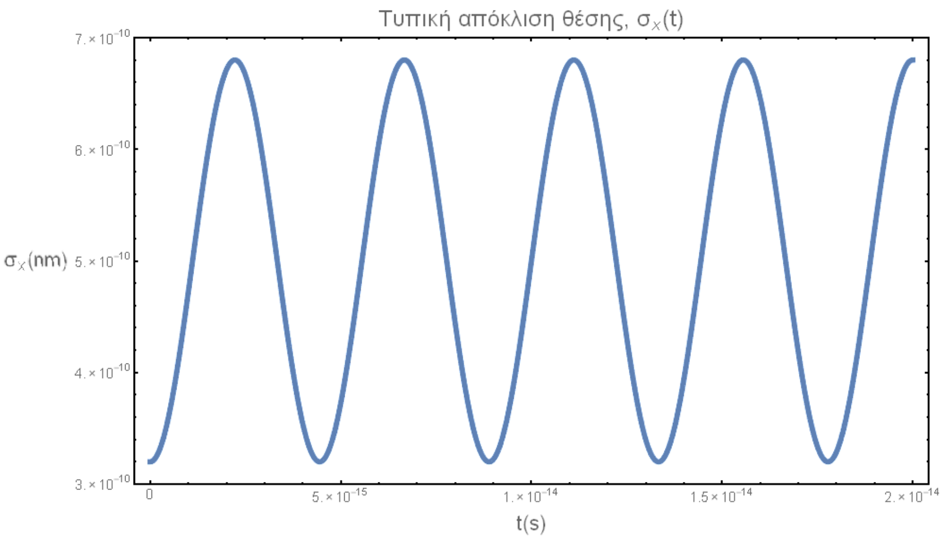
1) Βλέπουμε από το δεύτερο υποερώτημα ότι η πυκνότητα πιθανότητας έχει έναν ακόμα όρο συμβολής ($\psi_1\psi_2 Cos[3\omega t]$), που εξαρτάται από το χρόνο. Η εξάρτηση αυτή δείχνει ότι το σωματίδιο δε βρίσκεται σε μια ιδιοκατάσταση σε κάθε χρονική στιγμή, αλλά σε μια υπέρθεση καταστάσεων. Έτσι, η κατανομή πιθανότητας της κυματοσυνάρτησης του σωματιδίου είναι διαφορετική για κάθε χρονική στιγμή. Παρακάτω φαίνονται παραδείγματα κατανομής της πιθανότητας μέσα στο πηγάδι για τις χρονικές στιγμές t=0, t=$\frac{\pi}{2}\frac{1}{3\omega}$, t=$\frac{\pi}{3\omega}$

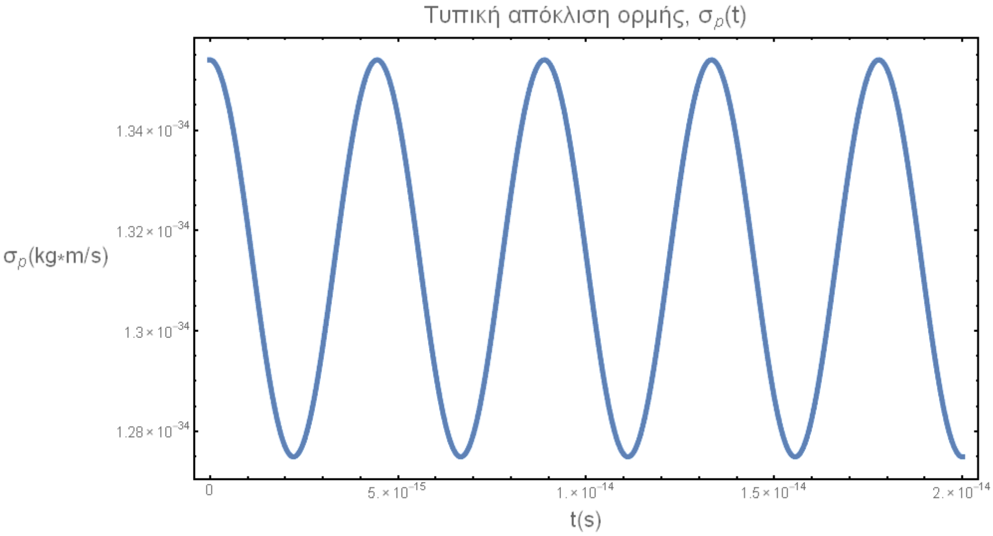


2) Το υποερώτημα 3 μας δείχνει ότι η μέση τιμή του σωματιδίου επίσης εξαρτάται από το χρόνο. Η εξάρτηση είναι (συν)ημιτονοειδής, με συχνότητα 3ω (που ισούται με $\frac{E_2-E_1}{\hbar}$) και πλάτος $0.36\frac{\alpha}{2}$. Η συχνότητα αντιστοιχεί στην ενεργειακή μετάβαση από τη θεμελιώδη ιδιοκατάσταση του πηγαδιού στη διεγερμένη, ενώ το πλάτος είναι μικρότερο από $\frac{\alpha}{2}$, όπως και πρέπει να είναι ώστε να είναι δέσμιο στο πηγάδι.

3) Στο υποερώτημα 4, η μέση τιμή της ορμής επίσης δεν είναι μηδενική, όπως συμβαίνει για πραγματικές κυματοσυναρτήσεις, αλλά εξαρτάται από το χρόνο. Παρ'ότι μια μη μηδενική (σταθερή) τιμή της ορμής θα σήμαινε ότι το σωματίδιο τείνει να διαφύγει από το πηγάδι, η ημιτονοειδής εξάρτηση δείχνει ότι αυτό δε θα συμβεί. Αρκεί κανείς να ολοκληρώσει τη μέση τιμή της ορμής στο χρόνο για να επιβεβαιώσει ότι το αποτέλεσμα είναι μηδέν, που σημαίνει ότι το σωματίδιο είναι όντως δέσμιο στο πηγάδι.

4) Οι αβεβαιότητες θέσης και ορμής εξαρτώνται επίσης ημιτονοειδώς από το χρόνο, κι έχουν μεταξύ τους μια διαφορά φάσης π/2. Στις χρονικές στιγμές που η μέτρηση της θέσης είναι αρκετά ακριβής, η μέτρηση της ορμής θα είναι λιγότερο ακριβής, και αντίστροφα.





5) Αν προστεθεί μια σχετική φάση στη μία από τις ιδιοσυναρτήσεις του πηγαδιού, αυτό αντιστοιχεί στη «μετακίνηση» του σημείου t=0. Η σχετική αυτή φάση, ως εκ τούτου, έχει φυσική σημασία, σε αντίθεση με μια απόλυτη φάση που πολλαπλασιάζει την κυματοσυνάρτηση Ψ[x, t].

6) Γενικό συμπέρασμα: σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με δύο (ή περισσότερες) καταστάσεις, το ηλεκτρόνιο δε βρίσκεται σε μία ιδιοσυνάρτηση αλλά σε υπέρθεση των δύο καταστάσεων, και το αποτέλεσμα της μέτρησης δίνει μια ημιτονοειδή χρονική εξάρτηση.

Άσκηση 4

$$\psi_o(x) = A\,x(L-x), 0 < x < L$$

L) Κανονικοποίηση:

$$\int_0^L |\psi_o(x)|^2 dx = A^2 \int_0^L x^2 (L-x)^2 dx = A^2 \int_0^L (x^2 L^2 - x^2 2Lx + x^4)\, dx =$$

$$= A^2 \left(L^2 \int_0^L x^2\, dx + 2L \int_0^L x^3 dx + \int_0^L x^4 dx \right)$$

$$= A^2 \left(\frac{L^2 x^3}{3}\bigg|_0^L + \frac{2Lx^4}{4}\bigg|_0^L + \frac{x^5}{5}\bigg|_0^L \right) = 1$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{30}{L^5}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{30}{L^5}}$$

$$\text{Άρα } \Psi(x,0) = \sqrt{\frac{30}{L^5}}\,x(L-x)$$

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sqrt{\frac{30}{L^5}}\int_0^L Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)x(L-x)dx =$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left[L\int_0^L x\,Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)dx - \int_0^L x^2 Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)dx\right]$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left\{\left[L\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) - \frac{L^2x}{n\pi}Cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)\right]\Bigg|_0^L\right.$$

$$\left. - \left[2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 x\,Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) - \frac{\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 - 2}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3}Cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)\right]\Bigg|_0^L\right\}$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left\{\left\{\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 L\,Sin\left(\frac{n\,\pi\,L}{L}\right) - 0 - \frac{L^3}{n\pi}Cos\left(\frac{n\,\pi\,L}{L}\right) + 0\right]\right\}$$

$$\left. - \left\{2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 L\,Sin\left(\frac{n\,\pi\,L}{L}\right) - 0 + \left[L^3\frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3}Cos(n\pi) + \frac{2}{(n\pi)^3}\right]\right\}\right\}$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left\{L\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cancel{Sin(n\pi)} - \frac{L^3}{n\pi}Cos(n\pi) - 2\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 L\,\cancel{Sin(n\pi)} + L^3\frac{2}{(n\pi)^3}\right.$$

$$\left. + L^3\frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3}Cos(n\pi)\right\}$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left\{-\frac{L^3}{n\pi}Cos(n\pi) + L^3\frac{2}{(n\pi)^3} + L^3\frac{(n\pi)^2 - 2}{(n\pi)^3}Cos(n\pi)\right\}$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left\{-\frac{L^3}{n\pi}Cos(n\pi) + L^3\frac{2}{(n\pi)^3} + L^3\frac{2}{n\pi}Cos(n\pi) - L^3\frac{2}{(n\pi)^3}Cos(n\pi)\right\}$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left[\frac{2L^3}{(n\pi)^3} - \frac{2L^3}{(n\pi)^3}Cos(n\pi)\right]$$

$$= \frac{2}{L^3}\sqrt{15}\left\{\frac{2L^3}{(n\pi)^3}[1 - Cos(n\pi)]\right\}$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^3}\sqrt{15}[1 - Cos(n\pi)]$$

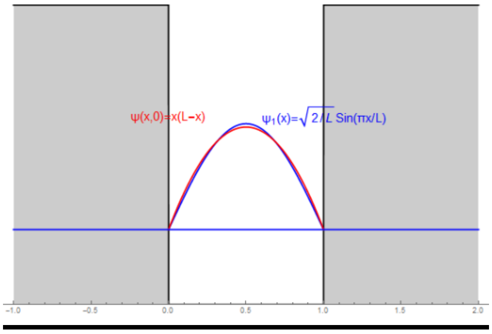
$$\boxed{\Rightarrow c_n = \begin{cases} \dfrac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3} & , n = 1,3,5,\ldots \\ 0 & , n = 2,4,6,\ldots \end{cases}}$$

$$\text{Και } \quad |c_n|^2 = \begin{cases} \frac{960}{(n\pi)^6} & , n = 1,3,5,\ldots \\ 0 & , n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

Για τη θεμελιώδη κατάσταση του πηγαδιού,

$$|c_1|^2 = \frac{960}{\pi^6} = 0.9985$$

Δηλαδή, μια μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου τη χρονική στιγμη t=0 δίνει πιθανότητα 99.85% να δώσει την ιδιοτιμή της θεμελιώδους ενέργειας E_1. Αυτό συμβαίνει γιατί η αρχική μας κυματοσυνάρτηση είναι άρτια και σχεδόν όμοια με τη θεμελιώδη κατάσταση του πηγαδιού:



$$b) i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{h^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V\Psi$$

Χωρισμός μεταβλητών:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t)$$

⇨ $i\hbar\psi\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi\varphi$

⇨ $i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E,$

όπου θέτουμε το αποτέλεσμα και των δύο μελών ίσο με μια σταθερά E, γιατί μόνο σε αυτή την περίπτωση οι δυο σχέσεις μπορούν να είναι ίσες.

$$i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = E$$

⇨ $\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{i}{\hbar}E\varphi$

⇨ $\varphi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$

Άρα

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Για την ψ(x),

$$-\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E$$

⇨ $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{\hbar^2}{2m}(E - V)\psi$

Λύσεις:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}Sin(\frac{n\pi x}{L})$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Άρα $\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}Sin(\frac{n\pi x}{L})e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \sqrt{\frac{2}{L}} Sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ \Psi(x,t) = \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3} \sqrt{\frac{2}{L}} Sin(\frac{n\pi x}{L}) e^{-i\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}t}}$$

$$c)\langle x\rangle_t = \int_0^L x|\Psi(x)|^2 dx = \sum_{n,m} c_n^* c_m \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L x\psi_n^*\psi_m dx$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \int_0^L x\, Sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, Sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$A\nu\ n = m,$$

$$\langle x\rangle_t = \sum_n |c_n|^2 \frac{2}{L}\, \overbrace{e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}}^{1} \int_0^L x\, Sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{2}{L} \int_0^L x\, \frac{1 - Cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)}{2}\, dx$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{1}{L} \int_0^L x\, \left[1 - Cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\, dx$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{1}{L} \left[\int_0^L x\, dx - \int_0^L Cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx\right]$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{1}{L} \left\{\frac{x^2}{2}\Big|_0^L - \left[\frac{L}{2n\pi} Sin\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\Big|_0^L\right\}$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{1}{L} \left[\frac{L^2}{4} - \cancel{\frac{L}{2n\pi} Sin(2n\pi)}\right]$$

$$= \frac{L}{4} \overbrace{\sum_n |c_n|^2}^{1}$$

$$= \frac{L}{4}$$

$$A\nu\ n \neq m,$$

$$\langle x\rangle_t = \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \int_0^L x\, Sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, Sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \frac{1}{2} \int_0^L x\, \left\{ Cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] - Cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right] \right\} dx$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{L\,x}{(n-m)\pi} Sin\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] \Bigg|_0^L + \frac{L^2}{(n-m)^2\pi^2} Cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] \Bigg|_0^L - \frac{L\,x}{(n+m)\pi} Sin\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right] \Bigg|_0^L - \frac{L^2}{(n+m)^2\pi^2} Cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right] \Bigg|_0^L \right\}$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{L^2}{(n-m)\pi} Sin[(n-m)\pi] - 0 + \frac{L^2}{(n-m)^2\pi^2}\{Cos[(n-m)\pi] - Cos[0]\} - \frac{L^2}{(n+m)\pi} Sin[(n+m)\pi] - 0 - \frac{L^2}{(n+m)^2\pi^2}\{Cos[(n+m)\pi] - Cos(0)\} \right\}$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{L^2}{(n-m)^2\pi^2}\{Cos[(n-m)\pi] - Cos[0]\} - \frac{L^2}{(n+m)^2\pi^2}\{Cos[(n+m)\pi] - Cos(0)\} \right\}$$

Αλλά εφ' όσον n περιττό, ισχύει $m = n + 2k$

$$\Rightarrow \langle x \rangle_t = \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{L^2}{(2k)^2\pi^2}\{Cos[2k\,\pi] - Cos[0]\} - \frac{L^2}{(2n+2k)^2\pi^2}\{Cos[(2n+2k)\pi] - Cos(0)\} \right\}$$

Αλλά $Cos[2k\,\pi] = 1$, *κι έτσι*

$$\Rightarrow \langle x \rangle_t = 0$$

Άρα $\langle x \rangle_t = \frac{L}{2}$ *,σταθερό και όχι χρονοεξαρτώμενο, γιατί η μέση τιμή κάθε ιδιοκατάστασης είναι* $\frac{L}{2}$ *(βλ. Άσκηση 5).*

Τι συμβαίνει όμως με το $\langle x^2 \rangle$;

$$\langle x^2 \rangle_t = \int_0^L x^2 |\Psi(x)|^2 dx = \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L} \int_0^L x^2\, \psi_n^* \psi_m dx$$

$$= \sum_{n,m} c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \int_0^L x^2\, Sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, Sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$A\nu\ n = m,$$

$$\langle x^2\rangle_t = \sum_n |c_n|^2 \frac{2}{L} \overbrace{e^{\frac{iE_nt}{\hbar}} e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}}^{1} \int_0^L x^2\, Sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{2}{L} \int_0^L x^2\, \frac{1 - Cos\left(2\frac{n\pi x}{L}\right)}{2}\, dx$$

$$K\alpha\iota\ \mu\varepsilon\ \acute{o}\mu o\iota o\ \tau\rho\acute{o}\pi o\ \mu\varepsilon\ \tau o\nu\ o\pi o\acute{\iota}o\ \kappa\alpha\tau\alpha\lambda\acute{\eta}\xi\alpha\mu\varepsilon\ \sigma\tau o\ \langle x\rangle_t,$$

$$\langle x^2\rangle_t = \sum_n |c_n|^2 \frac{2}{L} \frac{L^3(4n^3\pi^3 - 6n\pi \mathrm{Cos}(2n\pi) + (3 - 6n^2\pi^2)\mathrm{Sin}(2n\pi))}{24n^3\pi^3}$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{2}{L} \frac{L^3(4n^3\pi^3 - 6n\pi)}{24n^3\pi^3}$$

$$= \sum_n |c_n|^2 \frac{L^2 4n^3\pi^3 - 6n\pi L^2}{12n^3\pi^3}$$

$$= \sum_{n=1,3,5\ldots} \frac{960}{(n\pi)^6} L^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\boxed{= 0.28L^2}$$

$$A\nu\ n \neq m,$$

$$\langle x^2\rangle_t = \sum_n c_n^* c_m \frac{2}{L} e^{\frac{iE_nt}{\hbar}} e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}} \int_0^L x^2\, Sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) Sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \sum_n c_n^* c_m \frac{2}{L} e^{\frac{iE_nt}{\hbar}} e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}} \int_0^L x^2 \left\{ Cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] - Cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right]\right\} dx$$

$$= \sum_n c_n^* c_m \frac{2}{L} e^{\frac{iE_nt}{\hbar}} e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}} \left\{ \int_0^L x^2 Cos\left[\frac{(n-m)\pi x}{L}\right] dx - \int_0^L x^2 Cos\left[\frac{(n+m)\pi x}{L}\right] dx \right\}$$

$$= \sum_n c_n^* c_m \frac{2}{L} e^{\frac{iE_nt}{\hbar}} e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}} \left\{ \frac{L^3(2(m-n)\,\pi\, \mathrm{Cos}[(m-n)\,\pi] + (-2 + (m-n)^2\pi^2)\, \cancel{\mathrm{Sin}[(m-n)\pi]})}{(m-n)^3\pi^3} \right.$$
$$\left. - \frac{L^3(2(m+n)\pi \mathrm{Cos}[(m+n)\pi] + (-2 + (m+n)^2\pi^2)\cancel{\mathrm{Sin}[(m+n)\pi]})}{(m+n)^3\pi^3} \right\}$$

$$= \sum_n c_n^* c_m \frac{2}{L} e^{\frac{iE_nt}{\hbar}} e^{-\frac{iE_mt}{\hbar}} \left\{ \frac{L^3 2(m-n)\,\pi\, \mathrm{Cos}[(m-n)\,\pi]}{(m-n)^3\pi^3} - \frac{L^3 2(m+n)\,\pi\, \mathrm{Cos}[(m+n)\pi]}{(m+n)^3\pi^3} \right\}$$

$$K\alpha\iota\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ m - n = 2k$$

$$Cos[(m+n)\pi] = \mathrm{Cos}[(m-n)\,\pi] = 1$$

$$K\alpha\iota$$

$$\langle x^2\rangle_t = \sum_n c_n^* c_m \frac{2}{L}\, e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \left[\frac{L^3 2(m-n)\,\pi}{(m-n)^3\pi^3} - \frac{L^3 2(m+n)\,\pi}{(m+n)^3\pi^3}\right]$$

$$= \sum_{n,m,n\neq m} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3}\,\frac{8\sqrt{15}}{(m\pi)^3}\,\frac{4L^2}{\pi^2}\, e^{i\omega_{nm}t}\left[\frac{1}{(m-n)^2} - \frac{1}{(m+n)^2}\right]$$

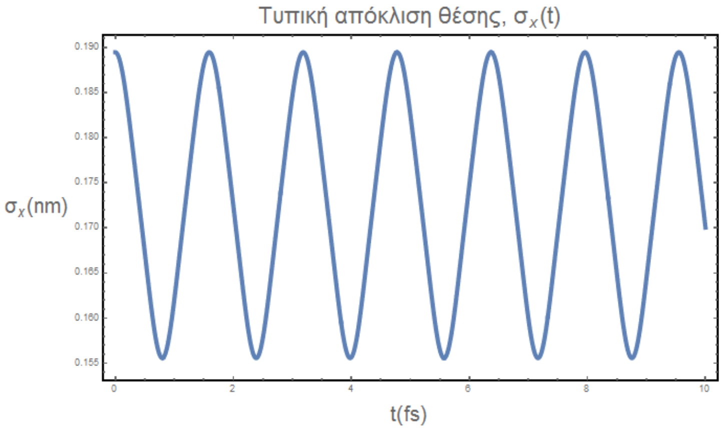
$$= \sum_{n,m,n\neq m} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3}\,\frac{8\sqrt{15}}{(m\pi)^3}\,\frac{4L^2}{\pi^2}\, e^{i\omega_{nm}t}\left[\frac{4\mathrm{mn}}{(m^2-n^2)^2}\right]$$

$$= 0.0056L^2 Cos[\omega_{31}t] + O(n\,m) \qquad \text{για ανώτερα } n, m, \text{με } n \neq m$$

Εδώ φαίνεται η αναμενόμενα χαμηλής τάξης χρονική εξάρτηση, η οποία προκύπτει επειδή το σωματίδιο μπορεί (αν και με μικρή πιθανότητα)να βρεθεί σε υψηλότερες ιδιοκαταστάσεις. Η τυπική απόκλιση της θέσης είναι:

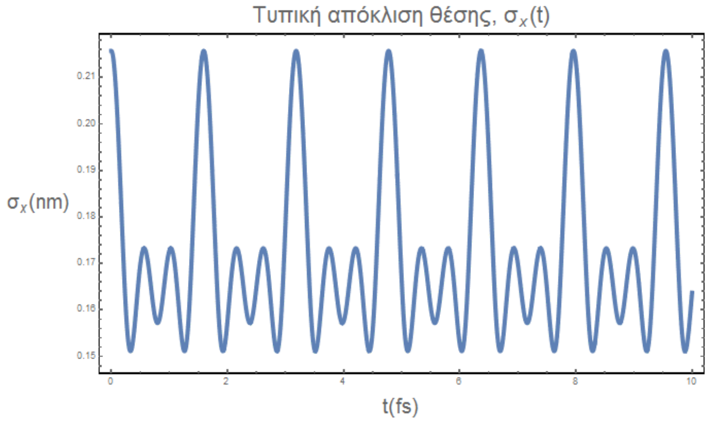
$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2} = \sqrt{(0.0056Cos[\omega_{31}t] + 0.28)L^2 - 0.25L^2}}$$

Δηλαδή, η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής θα ταλαντώνεται (σε μικρό βαθμό)με το χρόνο.Η γραφική παράσταση που μας δίνει η σ_x φαίνεται στην επόμενη εικόνα:



Όπου φαίνεται ότι, λόγω της ύπαρξης ενός όρου συμβολής $0.0056Cos[\omega_{31}t]$, υπάρχει μια απλή ημιτονοειδής εξάρτηση του σ_x από το χρόνο. Οι υπόλοιποι όροι συμβολής είναι τάξεις μεγέθους μικρότεροι, και γι'αυτό δεν έχουν εμφανή συνεισφορά.

ΑΝ η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο σε ενέργεια E_5 ήταν περίπου ίδια με την πιθανότητα να το βρούμε σε E_3 ($\sim 0.15\%$), τότε το διάγραμμα της σ_x θα γινόταν έτσι:



Όπου βλέπουμε ότι εκτός της συμβολής των όρων για n=1 και n=3, πλέον στη γραφική παράσταση είναι εμφανής και η συμβολή μεταξύ nm=1,5 και 3,5, οι οποίοι έχουν και διαφορετικές συχνότητες ω_{nm}.

δ) Από το πρώτο ερώτημα είδαμε ότι

$$|c_1|^2 = \frac{960}{\pi^6} = 0.9985 = 99.85\%$$

για τις ανώτερες ενέργειες,

$$|c_3|^2 = \frac{960}{3^6\pi^6} = 0.00137 = 0.137\%$$

$$|c_5|^2 = \frac{960}{5^6\pi^6} = 0.000064 = 0.0064\%$$

$$|c_7|^2 = \frac{960}{7^6\pi^6} = 8.5 * 10^{-6} = 0.000085\%$$

Οι πιθανότητες να μετρήσουμε E_n *για ανώτερα n είναι πρακτικά αμελητέες.*

ε) Σε διαφορετικούς χρόνους, θα βρίσκαμε την ίδια ακριβώς τιμή που θα βρίσκαμε για t_1. *Από τη στιγμή που μετρήσαμε σε χρόνο* t_1 *την ενέργεια σε μια συγκεκριμένη τιμή, το σωματίδιο θα μείνει σε αυτή την κατάσταση και θα βγάζει την ίδια τιμή.*

Τότε, όμως, τι σημασία έχει η ανάλυση που κάναμε, από την οποία βγήκε ότι η τυπική απόκλιση της θέσης (άρα και αυτή της ενέργειας, λόγω της αρχής αβεβαιότητας) θα έχει εξάρτηση από το χρόνο; Η σημασία της είναι η εξής: μας δείχνει ότι, αν προετοιμάσουμε ξανά ένα σωματίδιο στην κατάσταση ψ(x,0), και το μετρήσουμε σε διαφορετικό χρόνο, υπάρχει διαφορετική πιθανότητα να το βρούμε σε κάποια από τις δυο καταστάσεις.

Αλλά, καθώς μιλάμε για πιθανότητες και στατιστική, είναι επεξηγηματική η περίπτωση όπου αντί για ένα σωματίδιο έχουμε έναν αριθμό σωματιδίων, αρκετό ώστε να κάνουμε στατιστική ανάλυση. Αν, λοιπόν, μετρήσουμε σε μια χρονική στιγμη t_1 *την ενέργεια αυτού του συστήματος σωματιδίων, θα πάρουμε μια μέση τιμή της συνολικής ενέργειάς τους* $\left(\frac{E_1+E_2+E_3+\cdots+E_N}{N}\right)$, *και από εκεί και ύστερα για κάθε* $t_2 > t_1$ *θα μετράμε την ίδια. Αν ξαναπροετοιμάσουμε τα σωματίδια στην κατάσταση ψ(x,0) και ξαναμετρήσουμε σε διαφορετικό χρόνο, η μέση τιμή της ενέργειας όλων των σωματιδίων θα είναι πιθανόν διαφορετική, ανάλογα με τη χρονική στιγμή που κάνουμε τη μέτρηση και τη χρονική εξάρτηση.*

Άσκηση 5

$$\psi_n(x) = Sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$$

$$\langle x\rangle = \int_0^a x|\psi_n(x)|^2 dx$$

$$\Rightarrow \langle x\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a xSin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$= -\frac{2}{a}\frac{a^2(\cancel{-1} - 2n^2\pi^2 + \cancel{\mathrm{Cos}[2n\pi]} + \cancel{2n\pi\mathrm{Sin}[2n\pi]})}{8n^2\pi^2}$$

$$= \frac{2}{a}\frac{2a^2(n^2\pi^2)}{8n^2\pi^2} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_0^a x^2|\psi_n(x)|^2 dx$$

$$\Rightarrow \langle x^2\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a x^2 Sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \frac{2}{a}\frac{a^3(4n^3\pi^3 - 6n\pi\mathrm{Cos}[2n\pi] + \cancel{(3-6n^2\pi^2)\mathrm{Sin}[2n\pi]})}{24n^3\pi^3}$$

$$= \frac{2}{a}\frac{a^3(4n^3\pi^3 - 6n\pi)}{24n^3\pi^3} \boxed{= a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right) - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2} - \frac{1}{4}}$$

$$= a\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{n^2\pi^2}\right)} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{n^2\pi^2}}}$$

$$\langle p\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) p\ Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx =$$

$$= -\frac{2i\hbar}{a}\int_0^a Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{d\left(Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)}{dx} dx$$

$$= -\frac{2i\hbar}{a}\frac{n\pi}{a}\int_0^a Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ \ Cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ dx$$

$$= -\frac{2i\hbar}{a}\frac{n\pi}{a}a^2\frac{Sin^2(n\pi)}{4n\pi}$$

$$\Rightarrow \langle p\rangle = 0$$

$$\langle p^2\rangle = \frac{2}{a}\int_0^a Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)p^2\ Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= -\frac{2\hbar^2}{a}\int_0^a Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\frac{d^2\left(\ Sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)}{dx^2}\ dx$$

$$= \frac{h^2 n\ \pi\ (2n\pi - \cancel{Sin[2n\pi]})}{2a^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \langle p^2\rangle = \hbar^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\hbar^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

$$\boxed{\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}\ \ n\pi\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{2}{n^2\pi^2}}\ \geq \frac{\hbar}{2}} \qquad ,\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ \ n\pi\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{2}{n^2\pi^2}} > 1\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ n \geq 1$$