

**Πρόβλημα 1:** Από τις συναρτήσεις  $1, x, x^2, x^3, x^4$ , φτιάξτε ορθοκανονικοποιημένη βάση στο διάστημα  $-1 < x < +1$ , με την μέθοδο Gram-Schmidt.

**Πρόβλημα 2:** Η κατάσταση ενός σωματιδίου μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi_0(x) = A(a^4 - x^4), \quad \text{για } -a < x < a$$

και είναι μηδέν αλλού.

(α) Κανονικοποιήστε, και βρείτε το  $A$ .

(β) Υπολογίστε τις ποσότητες  $\langle x \rangle$ ,  $\sigma_x$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\sigma_p$ .

(γ) Βεβαιωθείτε ότι το γινόμενο αβεβαιότητας δεν παραβιάζει την ανισότητα του Heisenberg.

**Πρόβλημα 3:** Ένα σωματίδιο με μάζα  $m$ , σε απειρόβαθο πηγάδι (με πάχος  $a$ ), στο χρόνο  $t=0$  περιγράφεται με την κυματοσυνάρτηση  $\Phi(x,t=0)$ , που είναι υπέρθεση των δύο καταστάσεων  $\psi_n(x)$  και  $\psi_m(x)$  [με κβαντικό αριθμό  $n$  και  $m$ , αντίστοιχα]:

$$\Phi(x,0) = A[\psi_n(x) + \psi_m(x)]$$

(α) Κανονικοποιήστε, και βρείτε το  $A$ .

(β) Βρείτε  $\Phi(x,t)$  και  $|\Phi(x,t=0)|^2$ . Χρησιμοποιήστε  $\omega \equiv \pi^2 \hbar / (2ma^2)$ .

(γ) Υπολογίστε το  $\langle x(t) \rangle$ . Σε ποιές περιπτώσεις  $\langle x(t) \rangle \neq 0$ ; Βρείτε το πλάτος και την συχνότητα της ταλάντωσης.

(δ) Υπολογίστε το  $\sigma_x$  και  $\sigma_p$ , και το γινόμενο αβεβαιότητας.

(ε) Υπολογίστε το  $\langle H \rangle$ . Αν μετρήσετε την ενέργεια του σωματιδίου, ποιές τιμές είναι επιτρεπτές;

**Πρόβλημα 4:** Θεωρείστε το πρόβλημα σωματιδίου σε μονοδιάστατο απειροβαθές πηγάδι.

Την στιγμή  $t = 0$ , η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το σύστημα δίνεται από:

$$\psi_0(x) = A \sin(\pi x / L) [1 + \cos(\pi x / L)], \quad \text{για } 0 < x < L$$

και είναι μηδέν αλλού.

(α) Βρείτε το  $A$ .

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα κατά την μέτρηση της ενέργειας του σωματιδίου την στιγμή  $t = 0$ , να βρείτε μια από τις ενέργειες  $E_n$ .

(γ) Λύστε την εξίσωση του Schrödinger και βρείτε την κυματοσυνάρτηση σαν συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

(δ) Βρείτε την μέση τιμή της θέσης  $\langle x \rangle$  και την τυπική απόκλιση της  $\Delta x$  σαν συνάρτηση του χρόνου  $t$ .

(ε) Αν κάνετε μια μέτρηση της ενέργειας στο σύστημα σας σε χρόνο  $t$ , υπολογίστε ποιες είναι οι πιθανότητες να μετρήσετε τις ενέργειες  $E_n$ .