Κβαντική Μηχανική Ι.
Διδάσκων: Η. Κυρίτσης

Σύνολο Προβλημάτων 0

22 Σεπτεμβρίου 2015

Τα παρακάτω προβλήματα δίνονται για να δείτε αν θυμάστε καλά τα προαπαιτούμενα του μαθήματος. Αν δεν έχετε ήδη περάσει τα Μαθηματικά Ι, Μαθηματικά για Φυσικούς Ι (πρώτου χρόνου), Διαφορικές εξισώσεις Ι, Διαφορικές εξισώσεις ΙΙ (δευτέρου χρόνου), η πιθανότητα να περάσετε το μάθημα είναι απειροστά μικρή.

Για όσους τα έχετε περάσει, θα πρέπει να δοκιμάσετε να λύσετε τα παρακάτω προβλήματα για να δείτε αν θυμάστε αυτά που πρέπει.

Πρόβλημα 0.0 :Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int dx\, x^n \ , \ \int dx\, x \log x \ , \ \int dx\, x^2 \ \cos\omega x \ , \ \int dx\, x^3 \ e^{-ax} \ , \ \int \frac{dx}{a^2+x^2} \ , \ \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$$

Πρόβλημα 0.1 :Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

στο επίπεδο xy. Περιστρέφουμε την έλλειψη γύρω από τον άξονα των x και δημιουργούμε ένα στερεό σχήμα που έχει σχήμα μπάλας του rugby. Να χρησιμοποιήσετε τον ολοκληρωτικό λογισμό για να βρείτε τον όγκο της μπάλας που δημιουργήθηκε.

Πρόβλημα 0.2: Δίνεται πεπερασμένη πλάκα σταθερής πυκνότητας ρ ανά μονάδα επιφάνειας, που καλύπτει την περιοχή που φράσεται από την υπερβολή $y = 2x - x^2$ και τον άξονα των x. Βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου μάζα της.

Πρόβλημα 0.3 :Αναπτύξτε την συνάρτηση

$$f(x) = \arccos x$$

σε σειρά Taylor γύρω από το $x = 0$, κρατώντας όρους μέχρι και x^3.

Πρόβλημα 0.4 : Να βρεθεί η ημιτονική σειρά της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x = \pi. \end{cases} \tag{1}$$

Πρόβλημα 0.5 : Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + (\tan x - 1)y + \cos x = 0$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$.

Πρόβλημα 0.6 : Να βρεθεί η γενική λύση του παρακάτω συστήματος:

$$y_1'' + y_2' - 2y_1 + 2y_2 = 0 \ , \ y_2'' - y_1' + 2y_1 - 4y_2 = 0$$

Πρόβλημα 0.7 :

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$xy'' - (x+2)y' + \lambda y = 0$$

(α) Ποια είναι τα ιδιάζοντα σημεία της εξίσωσης. Είναι ομαλά η ανώμαλα;

(β)Υποθέσατε ότι η λύση είναι μια δυναμοσειρά γύρω από το $x = 0$. Βρείτε την αναδρομική σχέση μεταξύ των συντελεστών της σειράς.

(γ) Περιγράψατε σύντομα την συμπεριφορά των δυο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων γύρω από το $x = 0$ για τυχαίο λ.

(δ)Βρείτε τις δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις όταν $\lambda = 1$

Πρόβλημα 0.7 :

(α)Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Fick

$$\vec{J} = -\kappa \vec{\nabla} T$$

όπου $T(\vec{r}, t)$ είναι η θερμοκρασία στην θέση $\vec{r}$ τον χρόνο t και $\vec{J}$ είναι το διάνυσμα πυκνότητας ροής της θερμότητας, για να δείξετε ότι το $\vec{J}$ είναι αστρόβιλο.

(β) Θεωρείστε έναν πολύ μακρύ κύλινδρο ακτίνας R. Η εξωτερική του επιφάνεια κρατιέται σε σταθερή θερμοκρασία $T = T_0 \neq 0$. Σε χρόνο $t = 0$, η κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στον κύλινδρο δίνεται από $T(\rho,\theta,t=0)=f(\rho)$ όπου (ρ,θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες σε ένα επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση του κυλίνδρου. Λύστε την εξίσωση διάδοσης θερμότητας

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\sigma\vec{\nabla}^2 T$$

για να βρείτε την θερμοκρασία σαν συνάρτηση του χώρου και του χρόνου.

(γ) Ποιά η τελική θερμοκρασία του κυλίνδρου μετά από πολύ μεγάλο χρόνο; Αν $\sigma=0.12\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}$ και $R=10$ cm μετά από πόσο περίπου χρόνο ο κύλινδρος θα έχει θερμοκρασία πού θα διαφέρει το πολύ κατά 2% από την τελική, αν η αρχική του θερμοκρασία ήταν ομοιόμορφη και ίση με μηδέν;

(δ) Λύστε την ερώτηση (β) με αρχική κατανομή θερμοκρασίας $T(\rho,\theta,t=0)=f(\rho)$ ενώ η εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου κρατιέται σε θερμοκρασία που αλλάζει με τον χρόνο, $T(R,\theta,t)=g(t)$.

Πρόβλημα 0.8 :Βρείτε την λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u=0$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(x,0)=f(x)\ \ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$$

Είναι η λύση μοναδική;

Πρόβλημα 0.9 : Δίνεται ο διαφορικός τελεστής

$$D\equiv\frac{d^2}{dx^2}+k^2 \tag{2}$$

που δρα σε συναρτήσεις $u(x)$ στο διάστημα $[-L,L]$ που ικανοποιούν

$$u(L)=u(-L)\ \ ,\ \ u'(L)=u'(-L) \tag{3}$$

Βρείτε την συνάρτηση Green αυτού του τελεστού. Είναι αυτή μοναδική;